Les différentielles

1. Différentielle d'une fonction numérique dépendant d'une variable

1.1. Définition

Soit la fonction numérique *f(x)* définie et continue en un point *x* de son domaine d'existence *D*. Soit *dx* une petite variation de *x*, la différentielle de la fonction *f* est par définition : $df = f(x+dx) - f(x) = \left(\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right) dx$

Physiquement, la différentielle df de f est la variation de la fonction f due à la variation d*x* de *x*

1.2. Applications

a) Exprimer la variation d'énergie cinétique *dEc* due à une variation *dv* de la vitesse *v*:

b) Exprimer la différentielle de *ln(x)*:

1.3. Différentielle d'une somme

$$S = f + g + h \quad \rightarrow \quad dS = df + dg + dh$$

1.4. Différentielle d'un produit

$$p = f \times g \quad \rightarrow \quad dp = df \times g + f \times dg$$

1.5. Différentielle d'un quotient

$$q = \frac{f}{g} \quad \rightarrow \quad dq = \frac{df \times g - f \times dg}{g^2}$$

2. Différentielle d'une fonction numérique dépendant de plusieurs variables

2.1. Dérivée partielle

Soit *f* une fonction de plusieurs variables *x, y, z* indépendantes. la dérivée partielle de *f* par rapport à x est, la dérivée de *f* par rapport à *x* en considérant *y* et *z* constants, elle est notée : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz}$

2.2. Différentielle totale

- La variation partielle de *f(x,y,z)* due à la variation *dx* de *x* est : $df_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} dx$
- La variation partielle de *f(x,y,z)* due à la variation *dy* de *y* est : $df_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{xz} dy$
- La variation partielle de *f(x,y,z)* due à la variation *dz* de *z* est : $df_z = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{yx} dz$

La variation totale ou différentielle totale de la fonction *f* est égale à la somme des différentielles partielles (ou variations partielles) soit :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{xz} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{yx} dz$$

2.3. Différentielle logarithmique

On utilise la différentielle logarithmique quand *f* est un produit ou un quotient de fonctions . Soit la fonction $f(x,y,z) = \frac{kx^{\alpha} y^{\beta}}{z^{\gamma}}$ On a alors : $Lnf = lnk + \alpha lnx + \beta lny - \gamma lnz$ d'où la différentielle logarithmique *:*

$$d(lnf) = \left(\frac{d\,f}{f}\right) = \alpha\left(\frac{dx}{x}\right) + \beta\left(\frac{dy}{y}\right) - \gamma\left(\frac{dz}{z}\right)$$