Las calculatrices sont interdites. Répondez sur ce document-réponse.

Prénom NOM : ....

Exercice 1

```
P=1
for i in range(1,10) :
    for j in range(1,i) :
        P=2*P
```

Combien de multiplications sont effectuées ci-contre ?

Exercice 2 *Formule de Leibniz*

On admet que $\boxed{\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times 4}{2n+1}}$. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \times 4}{2n+1}$.

1. Quel est le nom du résultat du cours de mathématiques assure que cette série converge et que pour tout $N \in \mathbb{N}$, le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times 4}{2n+1}$ d'ordre N vérifie : $|R_N| \leq |u_{N+1}|$?

2. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, proposer une expression d'une valeur approchée V de π à ε près, à l'aide de la formule admise ci-dessus.

3. Ecrire une fonction Python `approche(err)` qui prend comme argument un réel `err` strictement positif et renvoie une valeur approchée V de π, telle que $|\pi - V| \leq \varepsilon$.
Note : vous ferez TRÈS attention à l'indentation, et à la syntaxe des fonctions, et des structures de contrôle en Python

Exercice 3 *Algorithme mystère*

On considère l'algorithme `mystere` suivant. On rappelle que la commande $L_1 + L_2$ permet de fusionner deux listes L_1 et L_2 Python.

```
def mystere(a,b,p) :
    #arguments d'entrée : a,b réels, a<b, p entier naturel
    #sortie : on renvoie une liste
    if p==0 :
        return([a])
    else :
        m=a+(b-a)/2
        return(mystere(a,m,p-1)+mystere(m,b,p-1))
```

1. L'algorithme `mystere` ci-dessus est un algorithme récursif. Pourquoi ?

2. Quel est le cas de base (ou de terminaison) de l'algorithme `mystere` ?

3. Si $a < b$, que représente la valeur $m = a + (b - a)/2$?

4. Pour $p \geq 1$ entier fixé, justifier que le nombre d'appels récursifs, avant d'atteindre des cas de base, de l'algorithme `mystere(a,b,p)` sera égal à $2 + 2^2 + \cdots + 2^p = 2^{p+1} - 2$.

5. Pour quel valeur de l'entier p le résultat obtenu pour l'appel `mystere(0,1,p)` sera-t-il `[0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.875]` ?
Détaillez les appels récursifs. On remarquera que le nombre de valeurs obtenues au final double à chaque incrémentation de p.

Exercice 4 *Recherche de racine par dichotomie*

On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'(au moins) une valeur $c \in]a, b[$ telle que $f(c) = 0$.

On souhaite réaliser un algorithme récursif `dicho(f,a,b,e)` qui à partir d'une fonction Python f et de deux réels $a < b$ comme ci-dessus et d'une valeur $e > 0$, fournit une valeur approchée de c à e près.

1. Pour $a < b$ et $m = \dfrac{a+b}{2}$, pourquoi a-t-on $f(a)f(m) \leq 0$ ou $f(m)f(b) \leq 0$?

2. Justifier que la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x + 1$ satisfait aux hypothèses pour $a = -1$ et $b = 1$.

3. Ecrire une syntaxe Python d'une fonction `f(x)`, qui à une valeur de x en entrée renvoie la valeur de $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

4. Ecrire une syntaxe Python permettant de tracer le graphe de f sur $[-5, 5]$.
   On utilisera les commandes import numpy as np, import matplotlib.pyplot as plt , `np.linspace()` , `plt.plot()` et `plt.show()`.

5. Ecrire une fonction récursive `dicho(f,a,b,e)` satisfaisant le cahier des charges.
   Pour la gestion des appels récursifs on pourra tester la condition $f(a)f(m) \leq 0$.