

4. Charge d'un condensateur dans un circuit à deux mailles ☺☺

1. **Pour $t=0^+$:** $u(0^+)=0$ car continuité de la tension aux bornes du condensateur. $u(0^+)=R_2 i'(0^+)=0$ d'où $i'(0^+)=0$ d'où $i''(0^+)=i(0^+)=\frac{E}{R_1}$

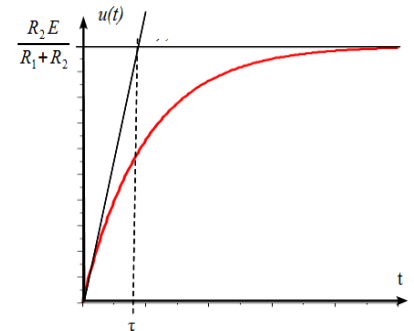
Pour $t=\infty$: Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. $i''(\infty)=0$ d'où $i'(\infty)=i(\infty)=\frac{E}{R_1+R_2}$
d'où $u(\infty)=R_2 i'(\infty)=\frac{ER_2}{R_1+R_2}$.

2. D'après la loi des nœuds : $i=i'+i''$ (1) or $u=E-R_1 i$ d'où $i=\frac{E-u}{R_1}$ de plus $u=R_2 i'$ d'où $i'=\frac{u}{R_2}$ et enfin $i''=C \frac{du}{dt}$. En remplaçant chaque intensité dans (1) on obtient : $\frac{E-u}{R_1}=C \frac{du}{dt}+\frac{u}{R_2}$ d'où

$$\boxed{\frac{du}{dt}+\frac{u}{\tau}=\frac{E}{R_1 C}} \text{ avec } \boxed{\tau=\frac{R_1 R_2 C}{R_1+R_2}}.$$

3. La solution est de type: $\boxed{u(t)=u_h+u_p(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{R_2 E}{R_1+R_2}}$. Or

$$u(0^+)=0=A+\frac{R_2 E}{R_1+R_2} \text{ d'où } A=-\frac{R_2 E}{R_1+R_2} \text{ d'où } \boxed{u(t)=\frac{R_2 E}{R_1+R_2}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

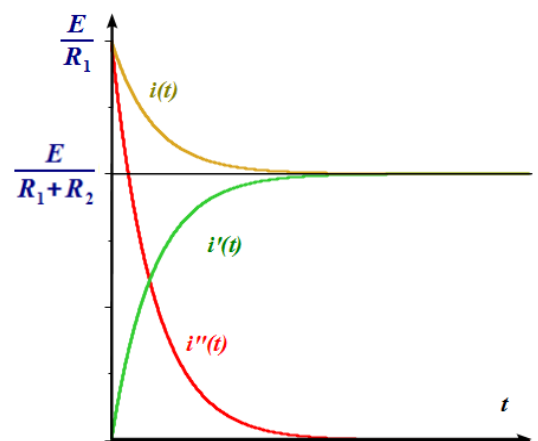


4. $i''=C \frac{du}{dt}$. En dérivant l'équation de la question 2, on obtient : $\boxed{\frac{di''}{dt}+\frac{i''}{\tau}=0}$

5. On résout l'équation précédente on obtient : $\boxed{i''(t)=\frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}}$

De plus $i'=\frac{u}{R_2}$ d'où $\boxed{i'(t)=\frac{E}{R_1+R_2}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$. Enfin

$$i=i'+i'' \text{ d'où } \boxed{i(t)=\frac{E}{R_1+R_2}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})+\frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



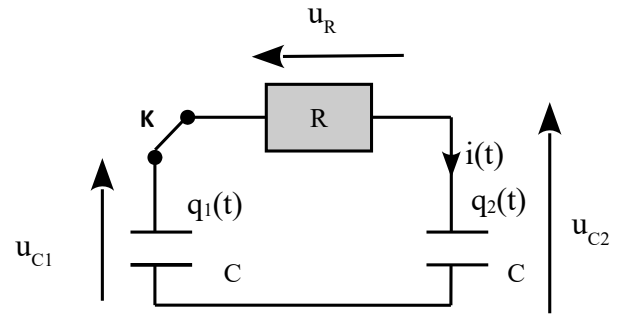
5. Charge et décharge ☺☺☺

1) Pour $t > 0$, le circuit à considérer est le circuit ci-contre.

D'après les conventions d'orientation choisies, on peut écrire

$$i = \frac{dq_2(t)}{dt} = -\frac{dq_1(t)}{dt} \text{ d'où}$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt} + \frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(q_1(t) + q_2(t)) = 0 \text{ d'où}$$



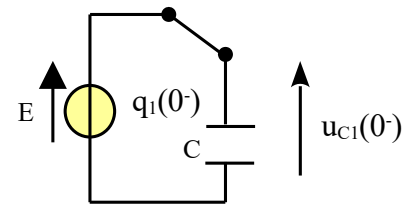
$q_1(t) + q_2(t) = K$ où K étant une constante déterminée grâce aux conditions initiales, c'est-à-dire : $K = q_1(0^+) + q_2(0^+)$

Détermination de K :

$q_2(0^-) = 0$ car le condensateur n'est pas chargé. D'après la continuité de la charge de condensateur on en déduit :

$$q_2(0^+) = q_2(0^-) = 0$$

Pour déterminer $q_1(0^+)$, il faut considérer dans un premier temps le circuit ci-contre pour $t = 0^-$.



D'après la loi des mailles $u_{C1}(0^-) = \frac{q_1(0^-)}{C} = E$ d'où $q_1(0^-) = CE$

D'après la continuité de la charge de condensateur on en déduit :

$$q_1(0^+) = q_1(0^-) = CE$$

Finalement $K = CE$ d'où $q_1(t) + q_2(t) = CE$.

Equation différentielle vérifiée par $q_2(t)$:

On applique la loi des mailles au circuit à considérer pour $t > 0$: $u_{C1} = u_{C2} + u_R$ d'où $\frac{q_1(t)}{C} = \frac{q_2(t)}{C} + Ri(t)$

or $i = \frac{dq_2(t)}{dt}$ et $q_1(t) = CE - q_2(t)$ d'où $\frac{CE - q_2(t)}{C} = \frac{q_2(t)}{C} + R \frac{dq_2(t)}{dt}$.

En écrivant l'équation sous sa forme canonique : $\frac{dq_2(t)}{dt} + \frac{2q_2(t)}{RC} = \frac{E}{R}$ soit $\frac{dq_2(t)}{dt} + \frac{q_2(t)}{\tau} = \frac{E}{R}$ avec $\tau = \frac{RC}{2}$

Résolution de l'équation :

$$q_2(t) = q_{2h}(t) + q_{2p}(t).$$

$$q_{2h}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad q_{2p}(t) = \tau \frac{E}{R} = \frac{\frac{RC}{2} \times E}{R} = \frac{EC}{2} \text{ (constante de la forme du 2nd membre).}$$

$$\text{D'où : } q_2(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{EC}{2}$$

On détermine A grâce à la condition initiale : $q_2(0^+) = 0 = A + \frac{EC}{2}$ d'où $A = -\frac{EC}{2}$

$$\text{Finalement : } q_2(t) = \frac{EC}{2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Application numérique :

$$q_2(10^{-4}) = \frac{100 \times 10^{-6}}{2} \left(1 - e^{-\frac{2 \cdot 10^{-4}}{200 \cdot 10^{-6}}}\right) = \frac{10^{-4}}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

2) L'énergie perdue par effet joule et l'énergie électrique W_R reçue par la résistance.

On sait que la puissance reçue est $P = u(t)i(t) = Ri^2 = \frac{dW_R}{dt}$ soit $dW_R = Ri^2 dt$ d'où

$$W_R = \int_0^{10^{-4}} R i^2(t) dt . \text{ Pour faire ce calcul, il faut déterminer } i = \frac{dq_2(t)}{dt} = \frac{d \frac{EC}{2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} = \frac{EC}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$W_R = \int_0^{10^{-4}} R \left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 dt = \int_0^{10^{-4}} \left(\frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) dt = -\tau \frac{E^2}{2R} \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{10^{-4}} = -C \frac{E^2}{4} \left[e^{-\frac{4t}{RC}} \right]_0^{10^{-4}} = \frac{-10^{-6} \times 100^2}{4} \left(e^{-\frac{4 \cdot 10^{-4}}{200 \cdot 10^{-6}}} - 1 \right) \text{ d'où}$$

$$\boxed{W_R = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$$