

Correction exercice 1

Circuit LC : prise en compte des pertes

a) Pour $t=0^-$:

On est en régime permanent continu le circuit équivalent est représenté ci-contre.

$u_c(0^-)=E$ et $i(0^-)=0$ et $u_L(0^-)=0$

Pour $t=0^+$:

On n'utilise la continuité de la tension dans le condensateur : $u_c(0^-)=u_c(0^+)=E$.

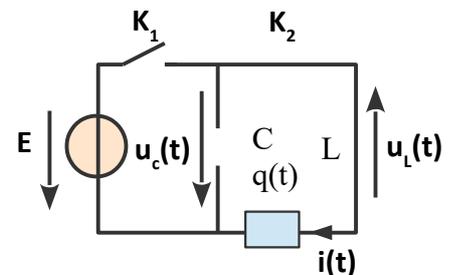
On utilise aussi la continuité de l'intensité dans la bobine: $i(0^-)=i(0^+)=0$.

On utilise la loi des mailles : $u_R(0^+)=R i(0^+)=0$ d'où $u_L(0^+)=-E$

Pour $t=\infty$:

Le circuit est de nouveau en régime permanent. Le circuit équivalent est représenté ci-contre.

$u_L(\infty)=0$ et $i(\infty)=0$. $u_R(\infty)=R i(\infty)=0$ donc $u_c(\infty)=0$ d'après la loi des mailles.



b) Pour $t > 0$, on applique la loi des mailles : $u_c + u_R + u_L = 0$ or $u_R = Ri$ et $i = C \frac{du_c}{dt}$ et $u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_c}{dt^2}$

donc : $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$. On écrit l'équation sous la forme: $\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0$

avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ la pulsation propre du circuit et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ le facteur de qualité du circuit.

c) La résistance critique correspond à $Q = \frac{L\omega_0}{R_C} = \frac{1}{2}$ donc $R_C = 2L\omega_0 = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Application numérique : $R_C = 2\sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-6}}} = 632 \Omega$.

A l'équation différentielle on associe l'équation caractéristique. Les solutions de l'équation sont:

$r_1 = r_2 = \frac{-\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ $u(t) = (A + Bt)e^{r_1 t} = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$

$t=0^+ u_c(0^+) = E = A$ et $\dot{u}(0^+) = 0 = r_1 A + B$

On tire que : $A = E$ et $B = -r_1 E = \omega_0 E$

$u(t) = E(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$

L'ordre de grandeur a durée caractéristique est $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

Application numérique : $\tau = \sqrt{10 \cdot 10^{-3} \times 0,1 \cdot 10^{-6}} = 3,16 \cdot 10^{-5} s$

La durée est imperceptible. La décharge du condensateur est immédiate.

d) $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{80} \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-6}}} = 3,95$ Le régime est pseudo-périodique car $Q > \frac{1}{2}$ Les racines de

l'équation caractéristique sont : $r_1 = \frac{-\omega_0}{2Q} + j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\mu + j\omega$ et $r_2 = \frac{-\omega_0}{2Q} - j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\mu - j\omega$. On calcule

$\mu = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{R}{2L} = \frac{80}{2 \times 10 \cdot 10^{-3}} = 4000$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 10^{-3} \times 0,1 \cdot 10^{-6}} - \frac{80^2}{4 \times 10 \cdot 10^{-3}}} = 29,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

En utilisant les conditions initiales on obtient :
$$u(t) = E e^{-\mu t} \left(\cos \omega t + \frac{\mu}{\omega} \sin \omega t \right)$$

L'ordre de grandeur de la durée caractéristique du régime transitoire est $\tau = \frac{1}{\mu} = 25 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

e) $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{8000} \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-6}}} = 0,0395$ Le régime est apériodique car $Q < \frac{1}{2}$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \frac{-8000}{2 \times 10 \cdot 10^{-3}} + \sqrt{\frac{8000^2}{4 \times 10 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10 \cdot 10^{-3} \times 0,1 \cdot 10^{-6}}} = -1252 \text{ et } r_2 = \frac{-R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \frac{-8000}{2 \times 10 \cdot 10^{-3}} - \sqrt{\frac{8000^2}{4 \times 10 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10 \cdot 10^{-3} \times 0,1 \cdot 10^{-6}}} = -798,7 \cdot 10^3$$

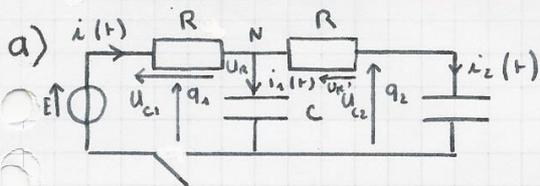
$$u(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

En tenant compte des CI : On tire que : $A = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1}$ et $B = \frac{r_1 E}{r_1 - r_2}$

L'ordre de grandeur de la durée caractéristique du régime transitoire est $\tau = \frac{1}{r_1} = 79,9 \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

f) La constante de temps la plus faible est celle du régime critique. Ceci est en accord avec le fait que le régime critique correspond au retour le plus rapide vers le régime permanent.

4) Mise en cascade d'une cellule RC.



1) Pour $t = 0^+$ $q_1(0^+) = q_2(0^+) = 0$
 de part la continuité de la charge dans les condensateurs $\Rightarrow u_{c1}(0^+) = u_{c2}(0^+) = 0$
 $\Rightarrow u_R(0^+) = R i(0^+) = E \Rightarrow i(0^+) = \frac{E}{R}$

$$u'_R(0^+) = u_{c1}(0^+) - u_{c2}(0^+) = R i_2(0^+) = 0 \Rightarrow i_2(0^+) = 0$$

D'après la loi des nœuds en N: $i_1(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}$ Rem: on peut également considérer les condensateurs \Leftrightarrow à des fils.

Pour $t \rightarrow \infty$: les deux condensateurs sont \Leftrightarrow à des interrupteurs ouverts \Rightarrow

$$i_2(\infty) = 0; i_1(\infty) = 0; i(\infty) = 0$$

b) $i_1 = C \frac{du_{c1}}{dt}$ or $u_{c1} = u_R + u_{c2} \Rightarrow C \frac{du_{c1}}{dt} = C \frac{du_R}{dt} + C \frac{du_{c2}}{dt}$

$$\Rightarrow i_1 = RC \frac{di_2}{dt} + i_2$$

$$E = R i + R i_2 + u_{c2} \Rightarrow i = \frac{E - R i_2 - u_{c2}}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = - \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{R} \frac{du_{c2}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = - \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{RC} i_2$$

On écrit la loi des nœuds $i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$

$$\Rightarrow - \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{RC} i_2 = RC \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

$$\Rightarrow RC \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 3 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{RC} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{R^2 C^2} = 0$$

c) On associe l'équation caractéristique: $x^2 + \frac{3}{RC} x + \frac{1}{R^2 C^2} = 0$

$$\Delta = \frac{9}{R^2 C^2} - \frac{4}{R^2 C^2} = \frac{5}{R^2 C^2} > 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{2RC} - \frac{\sqrt{5}}{2RC}$$

$$x_2 = -\frac{3}{2RC} + \frac{\sqrt{5}}{2RC}$$

$$i_2(t) = A e^{-\frac{t}{2RC}(3+\sqrt{5})} + B e^{-\frac{t}{2RC}(3-\sqrt{5})}$$

Détermination de A et B:

$$A t=0 i_2(0^+) = 0^+ \Rightarrow A+B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$A t=0 i_1(0^+) = RC \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} + i_2(0^+) = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{RC}$$

On calcule $\frac{di_z}{dt} \Big|_0 = \frac{-A(3+\sqrt{5})}{2RC} \times e^0 + \frac{A(3-\sqrt{5})}{2RC} \times e^0$ $i_z(0) = 0$ (1)

(1) $\Rightarrow \frac{E}{R} = -\frac{2A\sqrt{5}}{2RC} \times R \Rightarrow A = -\frac{E}{\sqrt{5}R}$ et $B = \frac{E}{\sqrt{5}R}$ (1)

$\Rightarrow i_z(t) = \frac{E}{R\sqrt{5}} \left[e^{-\frac{t}{2RC}} (3-\sqrt{5}) - e^{-\frac{t}{2RC}} (3+\sqrt{5}) \right]$ (1)

d) $\frac{di_z}{dt} \Big|_{t_n} = 0$ après calcul : $t_n = \frac{RC}{\sqrt{5}} \ln \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (2) $\approx 0,86 RC$

