Correction

2. Circuit LC : prise en compte des pertes

a) Pour t=0⁻ :

On est en régime permanent continu le circuit équivalent est repréenté ci-contre.

$u_C(0^-)=E$ et **$i(0^-)=0$ et $u_L(0^-)=0$**

Pour t=0⁺:

On n'utilise la continuité de la tension dans le condensateur : **$u_C(0^-)=u_C(0^+)=E$** .

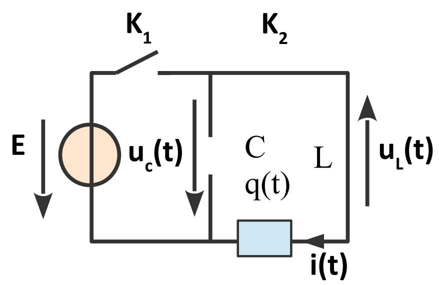
On utilise aussi la continuité de l'intensité dans la bobine:**$i(0^-)=i(0^+)=0$.**

On utilise la loi des mailles : **$u_R(0^+)=R\,i(0^+)=0$ d'où $u_L(0^+)=-E$**

Pour t=∞:

Le circuit est de nouveau en régime permanent. Le circuit équivalent est représenté ci-contre.

$u_L(\infty)=0$ et **$i(\infty)=0$. $u_R(\infty)=R\,i(\infty)=0$ donc $u_C(\infty)=0$ d'après la loi des mailles.**



b) Pour t > 0, on applique la loi des mailles : $u_c+u_R+u_L=0$ or $u_R=Ri$ et $i=C\dfrac{du_C}{dt}$ et $u_L=L\dfrac{di}{dt}=LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$

donc : $\boldsymbol{LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+RC\dfrac{du_C(t)}{dt}+u_c(t)=0}$ .On écrit l'équation sous la forme: $\boxed{\ddot{u}_C+\dfrac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C+\omega_0^2u_C=0}$

avec $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$ la pulsation propre du circuit et $Q=\dfrac{L\omega_0}{R}$ le facteur de qualité du circuit.

c) La résistance critique correspond à $Q=\dfrac{L\omega_0}{R_C}=\dfrac{1}{2}$ donc $R_C=2L\omega_0=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Application numérique : $R_C=2\sqrt{\dfrac{10.10^{-3}}{0,1.10^{-6}}}=632\,\Omega$.

A l'équation différentielle on associe l'équation caractéristique. Les solutions de l'équation sont:

$r_1=r_2=\dfrac{-\omega_0}{2Q}=-\omega_0$ $\boxed{u(t)=(A+Bt)e^{r_1t}=(A+Bt)e^{-\omega_0t}}$

t=0+ $u_C(0^+)=E=A$ et $\dot{u}(0^+)=0=r_1A+B$

On tire que : $\boldsymbol{A=E}$ et $\boldsymbol{B=-r_1E=\omega_0E}$

$$\boxed{u(t)=E(1+\omega_0t)e^{-\omega_0t}}$$

L'ordre de grandeur a durée caractéristique est $\boldsymbol{\tau=\dfrac{1}{\omega_0}}$

Application numérique : $\boldsymbol{\tau=\sqrt{10.10^{-3}\times0,1.10^{-6}}=3,16.10^{-5}\,s}$

La durée est imperceptible. La décharge du condensateur est immédiate.

d) $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}=\dfrac{1}{80}\sqrt{\dfrac{10.10^{-3}}{0,1.10^{-6}}}=3,95$ Le régimes est pseudo-périodique car $Q>\dfrac{1}{2}$ Les racines de l'équation caractéristique sont : $\boldsymbol{r_1=\dfrac{-\omega_0}{2Q}+j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}=-\mu+j\omega}$ et $\boldsymbol{r_1=\dfrac{-\omega_0}{2Q}-j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}=-\mu-j\omega}$. On calcule

$$\boldsymbol{\mu=\frac{\omega_0}{2Q}=\frac{R}{2L}=\frac{80}{2\times10.10^{-3}}=4000}$$

$\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\omega_0^2}{4Q^2}}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=\sqrt{\frac{1}{10.10^{-3}\times 0{,}1.10^{-6}}-\frac{80^2}{4\times 10.10^{-3^2}}}=29{,}0.10^3\,rad.s^{-1}$ En utilisant les conditions initiales on obtient : $\boxed{u(t)=E\,e^{-\mu t}\left(\cos\omega t+\frac{\mu}{\omega}\sin\omega t\right)}$

L'ordre de grandeur de la durée caractéristique du régime transitoire est $\tau=\frac{1}{\mu}=25.10^{-5}\,s$

e) $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{1}{8000}\sqrt{\frac{10.10^{-3}}{0{,}1.10^{-6}}}=0{,}0395$ Le régimes est apériodique car $Q<\frac{1}{2}$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1=\frac{-R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=\frac{-8000}{2\times 10.10^{-3}}+\sqrt{\frac{8000^2}{4\times 10.10^{-3^2}}-\frac{1}{10.10^{-3}\times 0{,}1.10^{-6}}}=-1252$$ et 'où

$$r_2=\frac{-R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=\frac{-8000}{2\times 10.10^{-3}}-\sqrt{\frac{8000^2}{4\times 10.10^{-3^2}}-\frac{1}{10.10^{-3}\times 0{,}1.10^{-6}}}=-798.7.10^3$$

$\boxed{u(t)=A\,e^{r_1 t}+B\,e^{r_2 t}}$

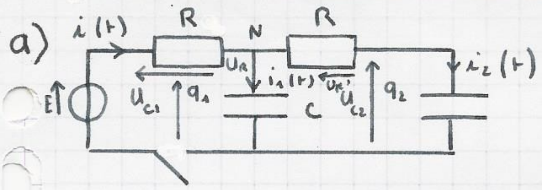
En tenant compte ds CI : On tire que : $A=\frac{r_2 E}{r_2-r_1}$ et $B=\frac{r_1 E}{r_1-r_2}$

L'ordre de grandeur de la durée caractéristique du régime transitoire est $\tau=\frac{1}{r_1}=79{,}9.10^{-5}\,s$.

f) La constante de temps la plus faible est celle du régime critique. Ceci est en accord avec le fait que le régime critique correspond au retour le plus rapide vers le régime permanent.

4) Mise en cascade d'une cellule RC.

a)



1) Pour $t = 0^+$ $\quad q_1(0^+) = q_2(0^+) = 0$

de part la continuité de la charge dans les condensateurs $\Rightarrow u_{C1}(0^+) = u_{C2}(0^+) = 0$

$\Rightarrow u_R(0^+) = R\,i(0^+) = E \Rightarrow \boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$

$u'_R(0^+) = u_{C1}(0^+) - u_{C2}(0^+) = R\,i_2(0^+) = 0 \Rightarrow \boxed{i_2(0^+) = 0}$

D'après la loi des noeuds en N : $\boxed{i_1(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}}$ Rem : on peut également considérer les condensateurs $\Leftrightarrow$ à des fils.

Pour $t\ \infty$: les deux condensateurs sont $\Leftrightarrow$ à des interrupteurs ouverts $\Rightarrow$

$\boxed{i_2(\infty) = 0 \ ; \ i_1(\infty) = 0 \ ; \ i(\infty) = 0}$

---

b) $i_1 = C\frac{du_{C1}}{dt}$ et $u_{C1} = u_{R'} + u_{C2} \Rightarrow C\frac{du_{C1}}{dt} = C\frac{du_{R'}}{dt} + C\frac{du_{C2}}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{i_1 = RC\frac{di_2}{dt} + i_2}$

$E = Ri + Ri_2 + u_{C2} \Rightarrow i = \frac{E - Ri_2 - u_{C2}}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{R}\underbrace{\frac{du_{C2}}{dt}}_{\frac{i_2}{C}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = -\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{RC}i_2}$

On écrit la loi des noeuds $\quad i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$

$\Rightarrow -\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{RC}i_2 = RC\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_2}{dt}$

$\Rightarrow RC\frac{d^2i_2}{dt^2} + 3\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{RC} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{R^2C^2} = 0}$

---

c) On associe l'équation caractéristique : $x^2 + \frac{3}{RC}x + \frac{1}{R^2C^2} = 0$

$\Delta = \frac{9}{R^2C^2} - \frac{4}{R^2C^2} = \frac{5}{R^2C^2} > 0$

$x_1 = -\frac{3}{2RC} - \frac{\sqrt{5}}{2RC}$

$x_2 = -\frac{3}{2RC} + \frac{\sqrt{5}}{2RC}$

$i_2(t) = A e^{-\frac{t}{2RC}(3+\sqrt{5})} + B e^{-t/2RC\,(3-\sqrt{5})}$

Détermination de A et B :

A $t=0$ $\quad i_2(0^+) = 0^+ \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$

A $t=0$ $\quad i_1(0^+) = RC\left.\frac{di_2}{dt}\right|_0 + i_2(0^+)$ (1)

$\Rightarrow \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{0^+} = \frac{E}{R^2C}$

On calcule $\left.\frac{di_2}{dt}\right)_0 \overset{1}{=} \frac{-A(3+\sqrt{5})}{2RC}\times e^0 + \frac{A(3-\sqrt{5})}{2RC}\times e^0$ $\qquad i_2(0) = 0$ 1

(1) $\Rightarrow \quad \frac{E}{\cancel{R}} = -\frac{\cancel{2}A\sqrt{5}}{\cancel{2}\cancel{R}\cancel{C}}\times \cancel{R}\cancel{C} \Rightarrow A \overset{1}{=} -\frac{E}{\sqrt{5}R}$ et $B = \frac{E}{\sqrt{5}R}$ 1

$\Rightarrow \quad i_2(t) = \frac{E}{R\sqrt{5}}\left[e^{-\frac{t}{2RC}(3-\sqrt{5})} - e^{-\frac{t}{2RC}(3+\sqrt{5})} \right]$ 1

---

d) $\left.\frac{di_2}{dt}\right)_{t_M} \overset{1}{=} 0$ après calcul : $t_M = \frac{RC}{\sqrt{5}} \ln \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \simeq 0{,}86\,RC$ 2

$\boxed{i_2(t_M) = 0{,}27\,\frac{E}{R}}$ 1