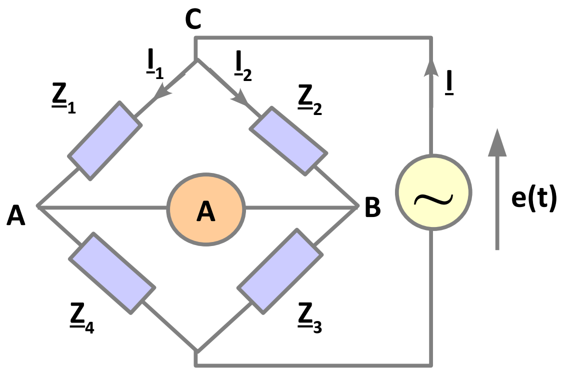
5. Pont de Maxwell



1) Si le pont est équilibré alors l'intensité est nulle dans l'ampère-mètre.

$\underline{I}_1=\dfrac{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}\underline{I}$ et $\underline{I}_2=\dfrac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_4}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}\underline{I}$

Si le pont est équilibré, le potentiel en A est le même qu'en B ainsi $\underline{V}_C-\underline{V}_A=\underline{V}_C-\underline{V}_B$ d'où $\underline{Z}_1\underline{I}_1=\underline{Z}_2\underline{I}_2$ d'où $\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)=\underline{Z}_2(\underline{Z}_1+\underline{Z}_4)$

d'où la condition d'équilibre du pont : $\boxed{\underline{Z}_1\underline{Z}_3=\underline{Z}_2\underline{Z}_4}$.

2.a) $\underline{Z}_1=R_1$; $\underline{Z}_3=R_3$; $\underline{Z}_2=R_2+jL\omega$ et $\underline{Z}_4=\dfrac{R_4}{1+jR_4C\omega}$.

D'après la condition d'équilibre :

$$R_1R_3=(R_2+jL\omega)\left(\frac{R_4}{1+jR_4C\omega}\right)=(R_2+jL\omega)\left(\frac{R_4}{1+jR_4C\omega}\right)\frac{(1-jR_4C\omega)}{(1-jR_4C\omega)}=(R_2+jL\omega)\frac{R_4(1-jR_4C\omega)}{1+(R_4C\omega)^2}$$ d'où

$R_1R_3=\dfrac{R_4}{1+(R_4C\omega)^2}\left(R_2-jR_2R_4C\omega+jL\omega+R_4LC\omega^2\right)$ d'où en égalant partie réelle et partie imaginaire :

$\boxed{R_1R_3=\dfrac{R_4\left(R_2+R_4LC\omega^2\right)}{1+(R_4C\omega)^2}}$ (1) et $\boxed{L\omega=R_4R_2C\omega}$ (2).

2b) L'équilibrage du pont en continu ($\omega=0$) impose d'après (1) $R_1R_3=R_4R_2$, la relation (2) est toujours vérifiée.

Quand le pont est équilibré en continu on l'équilibre en régime variable.

On a alors d'après (2): $L=R_4R_2C=R_1R_3C$ et d'après (1) $R_1R_3(1+(R_4C\omega)^2)=R_4\left(R_2+R_4LC\omega^2\right)$ d'où $R_1R_3(R_4C\omega)^2=R_4R_4LC\omega^2$ d'où $L=R_1R_3C$, on arrive à la même expression qu'avec la relation (2).

Un tel montage peut servir à déterminer les caractéristiques CR d'un condensateur ou LR d'une bobine.

6. Étude d'une résonance

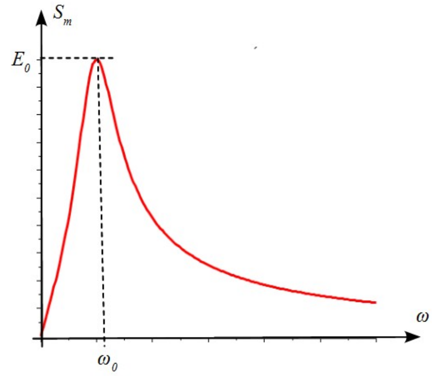
1) $\boxed{\underline{S}=S_m e^{j\phi}}$. On détermine l'impédance équivalente au condensateur et à la bobine en parallèle :

$$\underline{Z}_{eq}=\frac{jL\omega\times\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$$

. On a la structure d'un pont diviseur de tension donc $\underline{S}=\underline{E}\frac{\underline{Z}_{eq}}{R+\underline{Z}_{eq}}$ d'où

$$\underline{S}=\underline{E}\frac{\frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}}{R+\frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}}=\frac{jL\omega\underline{E}}{R-RLC\omega^2+jL\omega}$$

d'où $\boxed{\underline{S}=\frac{\underline{E}}{1+jR\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}}$.



2) $\boxed{S_m=\frac{E_0}{\sqrt{1+R^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}}$. S_m est maximum pour la pulsation ω_0

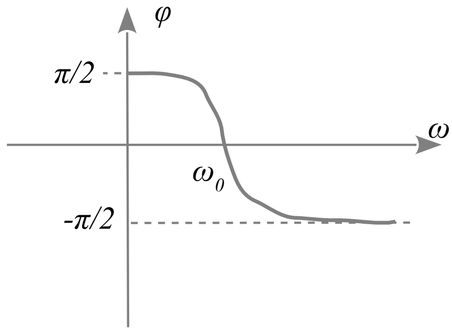
telle que : $C\omega_0=\frac{1}{L\omega_0}$ c'est à dire $\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$

3) On cherche les pulsations telles que : $S_m(\omega)=\frac{E_0}{\sqrt{2}}$

d'où $\frac{E_0}{\sqrt{1+R^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}=\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ d'où $R^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2=1$. Après résolution on trouve 2 pulsations :

$\boxed{\omega_1=\frac{-L+\sqrt{L^2+4R^2LC}}{2RLC}}$ et $\boxed{\omega_2=\frac{+L+\sqrt{L^2+4R^2LC}}{2RLC}}$ d'où $\boxed{\Delta\omega=\frac{1}{RC}}$ et $\boxed{Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{RC}{\sqrt{LC}}=R\sqrt{\frac{C}{L}}}$

4) A la résonance $\boxed{\underline{S}=\underline{E}}$, le déphasage est nul.



$\boxed{arg(\underline{S})=arg(\underline{E})-arg\left(1+jR\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)\right)}$ D'où

$\boxed{\tan\phi=-R\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}$ Et $\boxed{\cos\phi>0}$ donc $\boxed{\frac{-\pi}{2}<\phi<\frac{+\pi}{2}}$

5) Comparaison avec le circuit RLC :

Même pulsation de résonance ; déphasage nul à la résonance ; le facteur de qualité est inverse.