II.2 - Principe d'un capteur d'humidité capacitif

Deux disques conducteurs, de rayon a, de même axe $(O,\vec{u}_z)$, distants de $d \ll a$, constituent les armatures d'un condensateur à vide (**figure 4**). La charge portée par chaque armature varie de façon sinusoïdale avec le temps, à la fréquence f. On note $q(t) = q_0 \cos(2\pi f t)$ la charge portée par l'armature supérieure à l'instant t. On suppose que le courant qui apporte ces charges arrive par des fils infinis confondus avec l'axe de révolution $(O,\vec{u}_z)$ du condensateur.

On s'intéresse au champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t)\ ;\ \vec{B}(M,t))$ en tout point M à l'intérieur du condensateur et repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) dans le repère $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

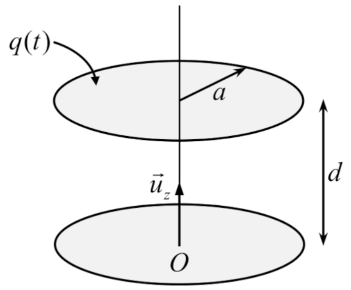

Figure 4 - Condensateur à symétrie cylindrique

Les échelles ne sont pas respectées

Q16. Justifier par des considérations de symétries et d'invariances que le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ est *a priori* de la forme : $\vec{E}(M,t) = E_r(r,z,t)\vec{u}_r + E_z(r,z,t)\vec{u}_z$.

Q17. On suppose en première approximation que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) \simeq \vec{0}$. En déduire l'ordre de grandeur du rapport $\left|\dfrac{E_r}{E_z}\right|$. Conclure sachant que les effets de bords sont négligeables $(d \ll a)$.

Déduire d'une autre équation de Maxwell que le champ $\vec{E}(M,t)$ est finalement de la forme : $\vec{E}(M,t) = E_z(r,t)\vec{u}_z$.

Q18. On cherche en première approximation un champ uniforme à l'intérieur du condensateur : $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(t) = E_{0,z}(t)\vec{u}_z$.

Déduire du théorème de Gauss appliqué à une surface à définir clairement, notamment à l'aide d'un schéma, l'expression du champ électrique $\vec{E}_0(t)$. On donnera le résultat en fonction de $q(t)$, a et de la permittivité du vide ε_0. On admettra que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur et on supposera que la densité surfacique de charges portée par chaque armature est uniforme.

Du fait de sa dépendance par rapport au temps, le champ $\vec{E}_0(t)$ crée un champ magnétique induit $\vec{B}_1(M,t)$. Le champ magnétique $\vec{B}_1(M,t)$ crée à son tour un champ induit $\vec{E}_2(M,t)$, terme correctif pour le champ électrique qui s'écrit : $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0(t) + \vec{E}_2(M,t)$.

Q19. À quelle condition portant sur $\|\vec{E}_2\|$ et $\|\vec{E}_0\|$ peut-on considérer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) \simeq \vec{0}$ comme supposé à la **Q17** ?

On admet que cette condition est vérifiée si $a \ll c/f$ où c est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. Proposer une interprétation physique.

La condition précédente étant vérifiée, le champ électrique à l'intérieur du condensateur dérive donc d'un potentiel scalaire $V_0(M,t)$ tel que $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V_0)$.

Q20. Donner l'expression du potentiel scalaire $V_0(M,t)$ à une constante additive près.

Exprimer la différence de potentiel $V_0(z=d) - V_0(z=0)$ entre les deux armatures et en déduire que la capacité C du condensateur s'écrit : $C = \dfrac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d}$.