

Étude physique d'un capteur de position

Le contrôle d'un système ou d'un processus physique présent dans un grand nombre de dispositifs technologiques nécessite de connaître à chaque instant, le plus précisément possible, un certain nombre de grandeurs physiques intervenant dans ce contrôle.

Ces grandeurs sont donc mesurées par des capteurs qui convertissent la grandeur physique mesurée en une grandeur électrique utilisée afin de réguler le processus.

La réalisation de capteurs doit prendre en compte divers éléments tels que la précision, la miniaturisation, le poids, le traitement numérique des données, etc.

Ce problème étudié dans un premier temps le principe physique selon lequel le capteur inductif linéaire « LVDT » (Linear Variable Differential Transformer) convertit un déplacement de position en une grandeur électrique (parties **I** et **II**). Dans un deuxième temps, il étudie le conditionnement de cette grandeur électrique en une tension proportionnelle au déplacement (partie **III**). Dans un dernier temps, il développe une application utilisant ce capteur (partie **IV**).

Pour les applications numériques, on ne conservera au plus que 2 chiffres significatifs.

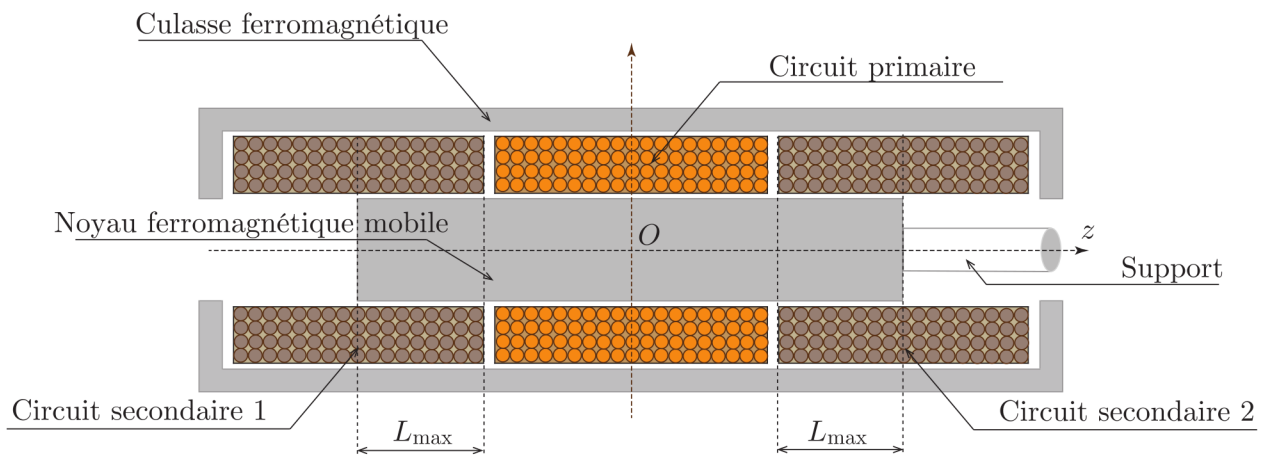


FIGURE 1 – Schéma descriptif du LVDT.

Le LVDT est un transformateur différentiel comportant trois circuits, un circuit primaire et deux circuits secondaires. Les bornes homologues de ces circuits, mentionnées sur la figure 2 à l'aide d'un point, sont telles que les courants algébriques entrants par ces bornes génèrent un flux magnétique algébrique orienté selon \vec{u}_z .

Les deux circuits secondaires sont identiques, constitués de fils de cuivre bobinés autour du noyau et portent n spires par unité de longueur.

Le circuit magnétique du transformateur est formé d'une culasse cylindrique externe ferromagnétique et d'un noyau cylindrique ferromagnétique de section S , de rayon a , relié à un support non magnétique qui permet de le translater selon l'axe Oz . Le déplacement de ce noyau cylindre par rapport à la position de référence représentée en figure 1 est limité à $\pm L_{\max}$.

L'ensemble présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz et on repérera l'espace par le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Le but de ce dispositif est de fournir une grandeur électrique permettant de caractériser le déplacement du cylindre.

Dans toute la suite, on supposera que le matériau magnétique constituant le noyau cylindrique et la culasse est parfait, de perméabilité magnétique μ_r infinie et de conductivité électrique nulle. Les matériaux non magnétiques (air, support, cuivre) ont une perméabilité magnétique relative égale à 1.

La figure 2 représente le système pour un déplacement algébrique z du centre C du cylindre tel $\vec{OC} = z\vec{u}_z$. Sur l'exemple de la figure 2, $z > 0$ et, de façon générale, z vérifie $|z| < L_{\max}$.

Le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p(t)$ et parcouru par le courant d'intensité $i_p(t)$. Les deux circuits secondaires sont connectés en série et la tension utile vaut $u_s = u_2 - u_1$ (voir figure 2).

La tension d'excitation u_p est sinusoïdale de fréquence f variant de 20 Hz à 20 kHz. La position du noyau magnétique affecte la répartition du champ magnétique et modifie les inductances mutuelles entre les circuits secondaires et le circuit primaire.

On notera :

- L_p , l'inductance propre du circuit primaire,
- M_1 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 1 et le circuit primaire,
- M_2 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 2 et le circuit primaire.

Le courant dans les deux circuits secondaires est supposé nul.

On désignera par état de référence, la configuration du dispositif où le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et où la position du noyau ferromagnétique est telle que $z = 0$.

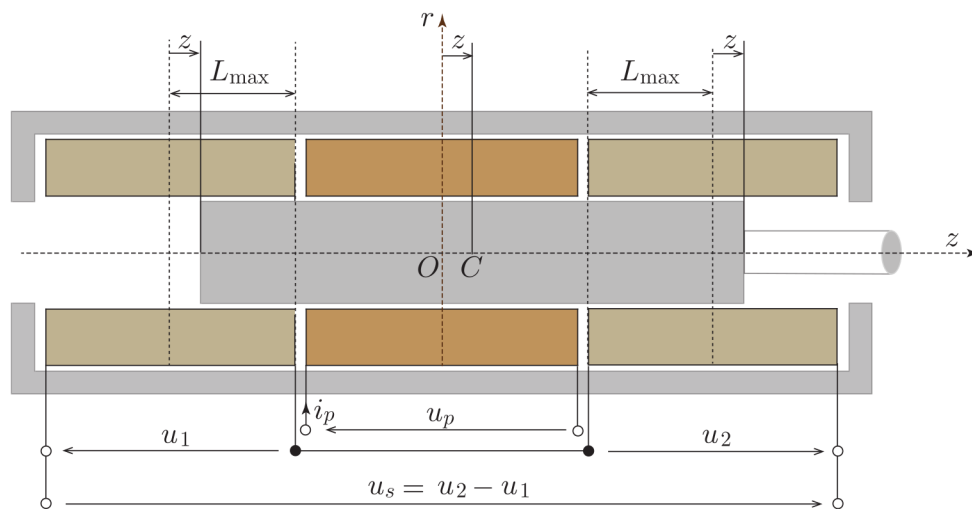


FIGURE 2 – Définition des paramètres

I Étude de l'état de référence

Dans tout le problème, on supposera la fréquence f suffisamment faible pour que l'étude s'inscrive dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).

- – 1. Énoncer dans le cadre de ce régime l'équation Maxwell-Ampère reliant le vecteur excitation magnétique \vec{H} et \vec{j} , on précisera la nature de \vec{j} . En déduire la forme générale de l'énoncé du théorème d'Ampère.
- – 2. Énoncer l'équation de Maxwell-Thomson (également appelée Maxwell-Flux) et en déduire la propriété correspondante du flux du champ magnétique.
- – 3. Quelle est la direction du champ magnétique en tout point du plan passant par O et orthogonal à \vec{u}_z ?
- – 4. En un point M de coordonnées (r, θ, z) quelconques, que peut-on dire des coordonnées (B_r, B_θ, B_z) du champ magnétique compte tenu des symétries du problème ?

La résolution numérique des équations locales permet de représenter, en figure 3, quelques lignes du champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , pour un courant $i_p > 0$.

- – 5. Le résultat de la simulation numérique est-il compatible avec ceux des questions 3 et 4 ?
On justifiera précisément la réponse.

La figure 4 fournit, en échelles arbitraires (E.A. sur la figure) et indépendantes, les variations des composantes $B_z = \vec{B} \cdot \vec{u}_z$ et de $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ en fonction de z à la distance r de l'axe tel que $0 < r < a$.

- – 6. Justifier les propriétés de parité de ces deux composantes du champ.
□ – 7. Représenter sommairement l'allure d'une ligne de champ. Après avoir orienté cette ligne, justifier le signe des composantes du champ magnétique observé en figure 4.

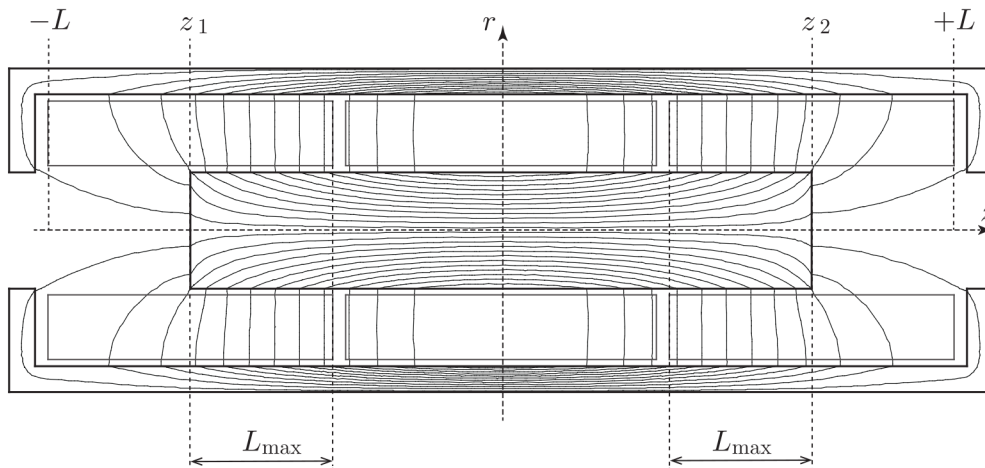


FIGURE 3 – Lignes de champ pour un noyau centré obtenues par simulation numérique.

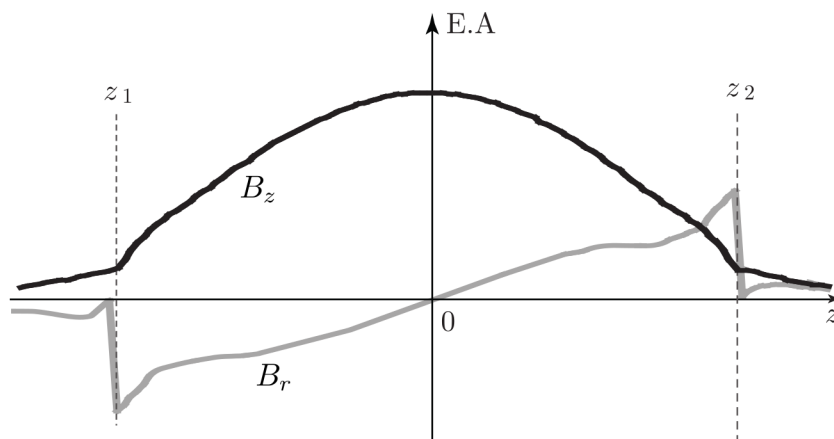


FIGURE 4 – Composantes B_r (en gris) et B_z (en noir) en r tel que $0 < r < a$.

On remarque que $|B_r|$ devient très faible sur une très courte distance juste après z_2 et juste avant z_1 .

- – 8. Justifier cette observation par un calcul littéral.

Peut-on, sur la figure 3, observer ce phénomène à d'autres endroits ?

Afin de déterminer l'expression des inductances mutuelles, on souhaite modéliser simplement le champ magnétique. Pour cela, grâce à la simulation numérique, sur la figure 5, on a représenté en trait plein la courbe des variations de $B_z/B_{z,\max}$ évaluée en $r = 0$ en fonction de z .

- – 9. Quels éléments observés en figures 3 et 5 permettent de justifier que l'on puisse considérer le champ magnétique comme uniforme au voisinage du centre du noyau.
- – 10. Quels éléments observés en figure 3 permettent d'expliquer la diminution de la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ observée en figure 5 lorsqu'on se rapproche des bords du noyau ?

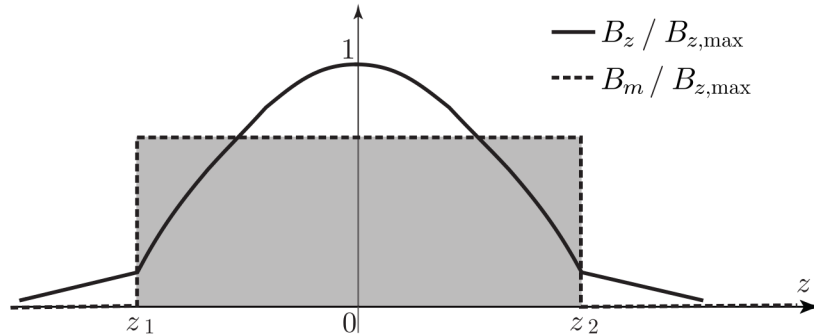


FIGURE 5 – Composante B_z sur l'axe Oz .

Dans un premier modèle, on assimile le champ magnétique axial au profil représenté en traits pointillés en figure 5. En effet, on supposera que :

- $\boxed{H_1}$: si $z_1 < z < z_2$ et $r < a$, alors la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ magnétique est uniformément égale à B_m , sa valeur moyenne sur l'axe Oz dans le noyau. On posera $B_m = K i_p$, où K est une constante caractéristique du système ;
 - $\boxed{H_2}$: si $z < z_1$ ou $z > z_2$ alors pour tout $r < a$ on a $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$;
 - $\boxed{H_3}$: en tout point compris entre le noyau et la culasse, tels que $-L < z < L$, alors $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$.
- – 11. Dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices, montrer que les deux inductances mutuelles M_1 et M_2 sont identiquement égales à une même valeur notée M_0 . Exprimer M_0 en fonction de S , K , n et L_{\max} .
 - – 12. Application numérique : On donne la résistance du circuit primaire $R_p = 100 \Omega$ et l'inductance du circuit primaire $L_p = 6 \text{ mH}$. Pour $U_p = 10 \text{ V}$, on mesure aux bornes de chacun des deux circuits secondaires non connectés entre eux une tension d'amplitude $1,5 \text{ V}$ pour une fréquence de 5 kHz . Calculer la valeur de M_0 . On prendra $10\pi \sim 30$ et $\sqrt{42 \cdot 10^3} \sim 205$.

II Déplacement du noyau

On étudie désormais le LVDT dans l'état représenté en figure 2 où le centre C du cylindre est déplacé de z par rapport à l'état de référence, soit $\vec{OC} = z\vec{u}_z$.

Le circuit primaire est toujours alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et parcouru par le courant d'intensité i_p . Le courant circulant dans les circuits secondaires connectés en série est nul.

La figure 6 représente le tracé des lignes de champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , obtenu par résolution numérique des équations locales dans les mêmes conditions que celui de la figure 3, pour un courant $i_p > 0$. Le seul changement réside dans la position du noyau.

La cartographie des lignes de champ dans le noyau étant très semblable à celle de la figure 3, on conserve les hypothèses $\boxed{H_1}$, $\boxed{H_2}$ et $\boxed{H_3}$ correspondantes.

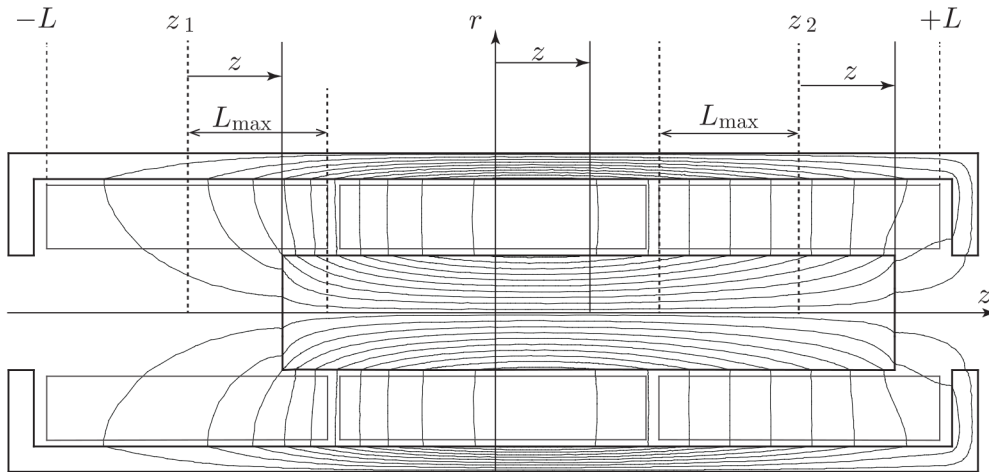


FIGURE 6 – Lignes de champ pour un noyau décentré.

- – 13. Dans le cadre de ce modèle, montrer que si $|z| < L_{\max}$ alors L_p est indépendante de z .
- – 14. Déterminer l'inductance mutuelle $M_1(z)$ en fonction de M_0 , z et L_{\max} .
- – 15. De même, déterminer l'inductance mutuelle $M_2(z)$ en fonction de M_0 , z et L_{\max} .
- – 16. Dédire des résultats précédents que la tension différentielle à vide du circuit secondaire s'écrit sous la forme $u_s = u_2 - u_1 = \lambda M_0 \frac{z}{L_{\max}} \frac{di_p}{dt}$, dans laquelle on précisera la valeur de la constante λ .
- – 17. Pour un courant i_p sinusoïdal fixé, quel est le paramètre de la tension u_s , noté A , permettant de mesurer z ? Tracer l'allure des variations de A en fonction de z ? Comment peut-on discerner le cas $z > 0$ et $z < 0$? Connaissez-vous un procédé permettant de générer une tension proportionnelle à ce paramètre?