endomorphismes symétriques

EXERCICE 15 : Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que $f \circ g$ est symétrique si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

On raisonne sur les matrices de f et g dans une b.o.n. On note A et B ces matrices. Alors $(AB)^T = AB$ si et seulement si, ces matrices étant symétriques, $BA = AB$.

EXERCICE 16 : Soit a un vecteur unitaire, k un réel différent de 0 et -1, u l'endomorphisme défini par : $\forall x \in E, u(x) = k(x|a)a + x$.

1. Montrer que u est bijectif.
2. Montrer que u est symétrique. Déterminer ses éléments propres.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de k, u est-il une isométrie ? Caractériser géométriquement u dans ce cas.

---

1) L'énoncé affirme que u est un endomorphisme, ce qui est aisément vérifiable. Sa bijectivité peut ainsi être montrée par trivialité de son noyau.
Soit donc x dans le noyau de u. Alors $k(x|a)a = -x$, ce qui implique que x et a sont colinéaires. Le vecteur a étant unitaire, il existe alors λ réel, tel que $x = \lambda a$. L'égalité précédente devient $k\lambda a = -\lambda a$, avec $k \neq -1$. Nécessairement $\lambda = 0$, puis $x = 0$.
L'endomorphisme u est de noyau trivial, il est donc bijectif.
2) Soient x et y dans E. $(u(x)|y) = (k(x|a)a + x|y) = k(x|a)(a|y) + (x|y) = (x|u(y))$: ceci étant valable pour tous x et y, l'endo. u est symétrique.
Soit x dans E éléments propre de u. Il existe alors λ tel que $k(x|a)a + x = \lambda x$.
Alors $\lambda = k+1$, et x est colinéaire à a. Les vecteurs propres associés à l'unique valeur propre $k+1$ sont tous les vecteurs non nuls coliénaires à a.
3) Pour que u soit une isométrie, il faut que k soit nul ou égal à -2. Dans ce dernier cas, u est la réflexion par rapport à $\text{Vect}(a)^\perp$.

EXERCICE 17 : Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A avec une matrice de passage orthogonale.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\chi_A(x) = -x^3 - 12x^2 - 21x - 10$ dont les racines sont -1 (racine double) et -10 (racine simple).
La matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, avec une matrice de passage orthogonale.
Une base de vecteurs propre est $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
Les s.e.p. associé à des v.p. sont orthogonaux, pour obtenir une b.o.n. de vecteurs propres, il ne reste qu'à normaliser le vecteur de $E_{-10}(A)$ en $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis à obtenir une b.o.n. de $E_{-1}(A)$, par le procédé de Gram-Schmidt.

EXERCICE 18 :

1. **Question classique :** Soit h un endomorphisme symétrique. Montrer que :

$$(\forall x \in E, (h(x)|x) \geqslant 0) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(h) \subset \mathbb{R}^+.$$

On dit alors que h est un endomorphisme symétrique positif et on note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.

2. Soit f et g dans $S^+(E)$. Montrer que : $\ker(f+g) = \ker(f) \cap \ker(g)$ et que $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

---

1) Version vectorielle de la première question de l'exercice 18.
Si $(\forall x \in E, (h(x)|x) \geqslant 0)$, alors pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$, $(h(x)|x) = \lambda ||x||^2 \geqslant 0$, avec $||x|| \neq 0$, d'où $\lambda \geqslant 0$.
Inversement, si toutes les v.p. de u sont positives, puisque les s.e.p. de h sont en somme directe orthogonale, tout x peut s'écrire sous la forme d'une somme $\sum x_i$ de vecteurs propres associés à des v.p. distinctes, et par linéarité de h et orthogonalité de ses s.e.p. $(h(x)|x) = \sum \lambda_i (x_i|x_i) \geqslant 0$.

2) Par double inclusion, l'une étant évidente.
Soit x, t.q. $(f+g)(x) = 0$. Alors $((f+g)(x)|x) = 0$, or c'est aussi égal à $(f(x)|x) + (g(x)|x)$, dont chaque terme est positif, et plus précisément, nul, pour que leur somme soit nulle. Ainsi $(f(x)|x) = 0$ et $(g(x)|x) = 0$. En écrivant x comme une somme de vecteurs propres (orthogonaux deux-à-deux) de f, puis par linéarité, on montre que $f(x) = 0$, puis, de même, que $g(x) = 0$.
Pour la seconde égalité, on peut montrer d'abord que pour E et F deux s.e.v. d'un e.v. euclidien (ce qui est le cas ici), $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$(*). De plus f et g sont dans $S^(E)$ (et $f+g$ est symétrique), donc le noyau de chacun est supplémentaire orthogonal de son image.
On note ensuite $F = \ker f$ et $G = \ker g$ (et ainsi $F^\perp = \mathrm{Im}\, f$ et $G^\perp = \mathrm{Im}\, g$), puis on conclut.

(*) Ce point peut constituer un exercice en lui-même !
On se rappelle qu'on est en dimension finie, ce qui justifie que $(F^\perp)^\perp = F$, pour F un s.e.v. de E.
Puisque $F \cap G \subset F$, $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. De même $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, d'où $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
On dispose également des inclusions $F^\perp \subset F^\perp + G^\perp$ et $G^\perp \subset F^\perp + G^\perp$ qui impliquent les inclusions $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset F$ et $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset G$, puis $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset F \cap G$, et enfin $(F \cap G)^\perp \subset F^\perp + G^\perp$.
Par double inclusion, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
La seconde égalité se prouve en prenant $F' = F^\perp$ et $G' = G^\perp$
En notant $F_1 = F^\perp$ et $G_1 = G^\perp$, on obtient $(F_1^\perp + G_1^\perp)^\perp \subset (F_1^\perp)^\perp \cap (G_1^\perp)^\perp$, et, puisque tous ces s.e.v. sont de dimension finie, ceci permet d'obtenir l'égalité suivante : $(F_1^\perp + G_1^\perp) = (F_1 \cap G_1)^\perp$, valable pour tous s.e.v. F_1 et G_1.