Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^4$, $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v} = (1, -1, 1, 3)$, $\vec{w} = (2, -5, 0, 5)$

$\vec{x} = (-1, 0, -1, 2)$ $\vec{y} = (2, 3, 0, 1)$

Enzo utilise le fait que la dimension de l'espace engendré par une famille est le rang, qui se calcule facilement par échelonnement dans le cas où les vecteurs sont dans K^n.

$F = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ $G = \mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$

On sait que $rg = \dim(\mathrm{Vect}(u_i)_{1 \leq i \leq p})$:

F : Soit la matrice :

$$\begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow -L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2}}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang est 2 , $\boxed{\text{la } \dim(F) = 2}$

$$\begin{array}{cc} \vec{x} & \vec{y} \end{array}$$

G : $$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow -L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rang = 2 , $\boxed{\dim(G) = 2}$

Scanned with CamScanner

F est généré $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$; G par $\vec{x}$ et $\vec{y}$
F+G est donc généré par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ et $\vec{y}$.

F + G :

$$F+G = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}, \vec{y})$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{x} & \vec{y} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \; L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \overset{L_4 \leftrightarrow L_1}{\sim}$$

$\dim(F+G) = rg(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & -9 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 20 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 \times (-\frac{1}{10})}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 20 \end{pmatrix} \overset{L_4 \leftarrow L_4 + 16L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36/5 \end{pmatrix}$$

rang = 4 , $\boxed{\dim(F+G) = 4}$

F ∩ G :

Formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Soit $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G)$

$= 2 + 2 - 4 = 0$

$\boxed{\dim(F \cap G) = 0}$ Ce qui signifie que $F+G = \{\vec{0}\}$.

Scanned with CamScanner