Espaces Probabilisés

I Ensembles finis ou dénombrables

1 Définitions

Définition

1. Un ensemble E non vide est **fini** lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Cet entier n est alors défini de manière unique : c'est le nombre d'éléments de E, appelé **cardinal** de E et noté : $\operatorname{Card} E$, $\#E$ ou $|E|$.
2. L'ensemble vide est fini, de cardinal nul.
3. Un ensemble E est **dénombrable** lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
4. Un ensemble est **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.

On peut donc indexer les éléments d'un ensemble fini sous la forme : $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et ceux d'un ensemble dénombrable sous la forme : $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Exemples : On admet que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables, mais que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

On retiendra les propriétés élémentaire suivantes :

1. Toute partie F d'un ensemble fini E est fini et : $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$.
   De plus : $F = E \Leftrightarrow \operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$.
2. L'image d'un ensemble fini E par une application f quelconque est un ensemble fini et : $\operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} E$.
   Si de plus l'application est injective, alors : $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E$.
3. Si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal et si f est une application de E dans F, alors f est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective.
4. Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
5. L'image d'un ensemble dénombrable par une application est au plus dénombrable.

Propriété 1 : Opérations sur les ensembles finis

1. Si E et F sont deux ensembles finis disjoints, alors :
$$\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F.$$
2. Si E et F sont deux ensembles finis quelconques, alors :
$$\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F - \operatorname{Card}(E \cap F).$$
3. Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et :
$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F.$$

Conséquences :

1. Si A est une partie de E et $\overline{A}$ est son complémentaire, alors : $\operatorname{Card} \overline{A} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$.
2. Si $A_1, \cdots, A_q$ sont des parties de E deux à deux disjointes, alors :
$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Card} A_i$.
3. Si $A_1, \cdots, A_q$ sont des parties de E quelconques, alors : $\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{q} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Card} A_i$.

Propriété 2 : Opérations sur les ensembles dénombrables

L'union et le produit cartésien de deux ensembles dénombrables sont des ensembles dénombrables.

2 Dénombrements usuels

Propriété 3 : Dénombrement des listes

Soit F un ensemble à n éléments.

1. Le nombre de p - listes d'éléments de F est : n^p.
2. Si $n \geqslant p$, le nombre de p - listes d'éléments distincts de F est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Propriété 4 : Dénombrement des applications

Soient E et F deux ensembles finis, $p = \operatorname{Card} E, n = \operatorname{Card} F$.

1. L'ensemble des applications de E dans F est fini :
$\operatorname{Card}(F^E) = n^p = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}$.
2. Si $n \geqslant p$, le nombre d'applications injectives de E dans F est :
$n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
3. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est : $n!$.
C'est le nombre de manières de ranger n éléments.

Propriété 5 : Dénombrement des parties d'un ensemble

1. Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments ($p \leqslant n$) est : $\dbinom{n}{p}$.
2. Le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments est : 2^n.

II Espace probabilisé

1 Rappel pour un ensemble fini

Une probabilité P sur un ensemble fini Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si A et B sont deux parties disjointes, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Propriété d'additivité).

Le couple (Ω, P) est alors un espace probabilisé fini. Notons : $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. La probabilité P est entièrement caractérisée par la donnée des n probabilités élémentaires : $p_i = P(\{\omega_i\})$.
On note plus simplement : $P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i)$.

Pour toute partie A de Ω, on a alors, par additivité : $P(A) = \displaystyle\sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

Réciproquement, si on donne n réels positifs $p_1, \cdots, p_n$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, il existe une unique probabilité P sur Ω telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], P(\omega_i) = p_i$.

2 Définition générale

Dans le contexte probabiliste, l'ensemble Ω (l'univers) est l'ensemble de tous les résultats possibles associés à une "expérience". Un événement est un ensemble de résultats dont on peut savoir, a posteriori, s'il s'est produit ou non.
Dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, on peut en général définir comme événement toute partie de Ω. Mais ce n'est pas le cas dans toutes les situations.
Lorsque l'on considère, par exemple, la durée de vie d'un atome radioactif, l'ensemble des résultats possibles est $\mathbb{R}^+$. Si $t_0 \in \mathbb{R}^+$, on ne peut pas décider si la durée de vie est exactement égale à t_0. On travaille alors plutôt sur des intervalles : la durée de vie est-elle comprise entre t_1 et t_2 ?
On est donc amené, de manière générale, à préciser la définition des événements associés à l'expérience. On définit ce que l'on appelle la **tribu** des événements, c'est-à-dire une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant des règles ensemblistes simples.

Dans ce paragraphe, les définitions sont données de manière générale, mais dans le cadre du programme les calculs seront faits essentiellement sur des ensembles dénombrables.

Définition

On appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

1. Ω appartient $\mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ est stable par complémentarité : Pour tout $A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable** et les éléments de $\mathcal{A}$ sont les **événements**.

Conséquence : Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'intersection $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Remarque : La stabilité est vérifiée en particulier pour une union ou une intersection d'un nombre fini d'événements.

On peut alors définir une probabilité sur l'espace probabilisable ainsi construit.

Définition

Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour toute suite $(A_n)_n$ d'événements deux à deux incompatibles, on a :
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$
(Propriété d'additivité dénombrable)

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

3 Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé quelconque. Les propriétés suivantes, déjà connues dans le cas d'un univers fini, restent valables :

Propriété 6 : Règles de calcul

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si $A \subset B$, alors : $P(A) \leqslant P(B)$.
4. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
5. Si $A_1, \cdots, A_q$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors : $P\left(\bigcup_{k=0}^{q} A_k\right) = \sum_{k=0}^{q} P(A_k)$.
6. Si A et B sont deux événements quelconques, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

S'y ajoutent des propriétés liées aux unions ou intersections dénombrables :

Propriété 7 : Continuité croissante

Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'événements, i.e telle que : $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$.
Alors : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

Exemple d'application : On considère une épreuve répétée indéfiniment au cours de laquelle on s'intéresse à la réalisation d'un certain succès (exemple : on lance une pièce et on observe l'apparition d'un pile). Soit A l'événement : "obtenir au moins un succès". On peut définir les événements A_n : "obtenir au moins un succès lors des n premières réalisations". La suite (A_n) est une suite croissante d'événements dont la réunion est A. On a donc : $P(A) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

Propriété 8 : Continuité décroissante

Soit $(A_n)_n$ une suite décroissante d'événements, i.e telle que : $\forall n, A_{n+1} \subset A_n$.
Alors : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Propriété 9 : Sous-additivité

Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements telle que $\sum P(A_n)$ converge.
Alors : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

4 Cas d'un univers dénombrable

On note ici : $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$, muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. On peut, comme dans le cas fini, définir les probabilités élémentaires : $p_n = P(\{\omega_n\})$, telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \in [0,1]$.

$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega_n\}$ donc, par additivité dénombrable, on en déduit que la série de terme général p_n converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

La probabilité de tout événement A est égale à la somme des probabilités des éventualités appartenant à A, cette somme pouvant éventuellement être celle d'une série convergente.

Réciproquement, on admet que la donnée d'une suite $(p_n)_n$ de réels positifs telle que la série $\sum p_n$ converge et a pour somme 1 définit une unique probabilité sur Ω en posant :
$\forall n, P(\{\omega_n\}) = p_n$.

Remarque sur l'indexation des éléments : L'ensemble Ω étant dénombrable, on peut construire plusieurs bijections de $\mathbb{N}$ dans Ω. Il existe donc plusieurs manières d'indexer les éléments de Ω. Par exemple : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\} = \{0,2,1,4,6,3,8,10,5,\cdots\}$.
Notons : $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\} = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ et : $p_n = P(\{\omega_n\})$, $q_n = P(\{x_n\})$.
P étant une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on a donc la convergence des deux séries $\sum p_n$ et $\sum q_n$, et de plus : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1$.
Ces deux séries comportent les mêmes termes mais pas dans le même ordre. En règle général, changer l'ordre des termes modifie les sommes partielles et peut donc modifier la nature d'une série, ou la valeur de sa somme si les deux séries convergent.

On admettra le théorème suivant sur les séries absolument convergentes :

Théorème 10 : Sommation d'une série absolument convergente

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Toute série $\sum v_n$ obtenue en modifiant l'ordre des termes est absolument convergente et a la même somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

III Conditionnement et indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé quelconque.

1 Probabilité conditionnelle

Définition

Soit B un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement A, la **probabilité conditionnelle** de A sachant B est : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Rq : On note aussi $P_B(A) = P(A|B)$.

Propriété 11 :

L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Conséquence : P_B vérifie toutes les règles de calcul énoncées pour une probabilité.

Propriété 12 : Formule des probabilités composées

1. Soit B un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement A, on a : $P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P(A|B)P(B)$.
2. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements tels que : $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a alors : $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \times P(A_{n-1}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \times \cdots \times P(A_2|A_1) \times P(A_1)$.

2 Système complet d'événements

Définition

Un **système complet** (fini ou dénombrable) d'événements est une famille d'événements $(A_1, \cdots, A_n)$ ou $(A_n)_n$ qui forment une partition de Ω : leur union est égale à Ω et ils sont deux à deux incompatibles.

Propriété 13 : Formule des probabilités totales

1. Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un système complet fini d'événements de probabilité non nulle. Pour tout événement B, on a :
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k).$$
2. Soit $(A_n)_n$ un système complet dénombrable d'événements de probabilité non nulle. Pour tout événement B, la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et on a :
$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n).$$

Rq : La formule reste valable pour une suite d'événements $(A_n)_n$ deux à deux disjoints et tels que : $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$, i.e : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

Propriété 14 : Formules de Bayes

1. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors :
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$
2. Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un système complet fini d'événements de probabilité non nulle. Pour tout événement B et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$
3. Soit $(A_n)_n$ un système complet dénombrable d'événements de probabilité non nulle. Pour tout événement B et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{j=0}^{+\infty} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Interprétation : Cette formule est aussi appelée "formule de probabilité des causes".
Une première étape de l'expérience conduit à l'un, et l'un seulement, des événements A_j. Lors de la réalisation de l'événement B, on calcule la probabilité pour que cet événement soit réalisé "à cause" de A_k.

3 Evénements indépendants

Définition

1. Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
2. Les événements $A_1, \cdots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** lorsque pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.
3. Les événements $A_1, \cdots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** lorsque pour toute famille d'indices distincts $i_1, \cdots, i_k$ dans $[\![1, n]\!]$, on a :
$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}).$$

Rq 1 : Si B est de probabilité non nulle, A et B sont indépendants si et seulement si : $P_B(A) = P(A)$. Intuitivement, cela signifie que la réalisation de B n'influe pas sur celle de A. Mais l'égalité numérique qui définit l'indépendance n'a pas toujours d'explication intuitive.

Rq 2 : Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.

Propriété 15 :

Si des événements $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants, toute famille $(B_1, \cdots, B_n)$, où B_i est égal soit à A_i soit à son complémentaire, est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.