PSI **Février 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espérance et Variance des variables discrètes

Exercice 1. : Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant 'pile' avec la proba p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois 'pile'. Soit X le nombre de 'faces ' obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 2. : On lance deux dés honnêtes numérotés. On note D_1 et D_2 les faces amenées par le dé $n°1$ et le dé $n°2$ respectivement. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et variance si elles existent.

Exercice 3. : (CCP 2018)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeur dans $\mathbb{N}$ et de même loi. On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer l'espérance de X.
2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. Reconnaître la loi de X.

Exercice 4. : Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires suivant la même loi et mutuellement indépendantes telle que la loi de X_n est définie par : $P(X_n = -1) = p, P(X_n = 1) = 1 - p$
On définit $\forall n \geq 1, Z_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. On pose : $a_n = P(Z_n = -1), b_n = P(Z_n = 1)$.

1. Trouver une relation simple entre a_n et b_n.
2. Trouver une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Déterminer a_n en fonction de n et p.
4. Calculer l'espérance de Z_n.
5. Calculer la covariance de Z_n et Z_{n+1}.
6. Calculet $cov(Z_1, Z_2)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5. : Une urne contient 4 boules rapportant 0,1,1,2 points.

1. On effectue un tirage. X est la variable aléatoire "points obtenus". Déterminer la série génératrice.
2. On effectue n tirages avec remise et S le score total obtenu Déterminer la série génératrice de S et en déduire la loi de S
3. Reconnaître la loi de S pour donner $E(S)$ et $V(S)$ et retrouver ces valeurs à l'aide de la série génératrice

Exercice 6. : Soit X une variable aléatoire telle que $E(|X|) = 0$. Montrer que $P(X = 0) = 1$ (on dit que X est quasi-nulle).

Exercice 7. : On lance n fois une pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où le lancer a donné pile. Pour $\lambda > 0$, donner un majorant de $P(|X - \frac{n}{2}| \geq \lambda n)$.

Exercice 8. : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.
Un laboratoire met sur le marché un médicament qui a une très faible probabilité p d'avoir des effets indésirables majeurs.

Lors d'un test sur 1000 personnes, aucun effet indésirable n'a été relevé. Le laboratoire affirme alors que la probabilité que son médicament soit inoffensif est supérieur à 99%. Est-ce sérieux ?

Exercice 9. : On lance n fois un dé équilibré. X est le nombre de 6 obtenus. Si X est pair, le joueur A gagne, sinon c'est le joueur B.

1. Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.
2. Calculer les probabilités respectives de gain pour A et B.
3. Quand un joueur gagne, il reçoit en euro le nombre de 6 obtenus. Soit Y le gain de A et Z celui de B. Déterminer les espérances de Y et Z. Interpréter

Exercice 10. : On lance n fois deux dés non truqués A et B : X est la variable aléatoire associée au nombre de fois où le chiffre de A est strictement supérieur à celui de B.
Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
Enoncer la formule de Biénaymé Tchebychev.
Exprimer $p_n = P(0,9 \leq \frac{X}{E(X)} \leq 1.1)$ à l'aide de $|X - E(X)|$ et trouver n tel que $p_n \geq 0.99$.

Exercice 11. : (Mines Ponts 2018)
On lance simultanément six dés à six faces. Après chaque lancer, on enlève les dés ayant donné 6. On recommence avec les dés restants jusqu'à ce que tous les dés aient donné un 6. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.
2. La variable X possède-t-elle une espérance ? une variance ?

Exercice 12. : (Centrale 2018)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1. Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.
2. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrer que $\dfrac{1}{E(X)} \leq E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
3. Montrer cette inégalité dans le cas général.

Exercice 13. : (Centrale 2018)
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Donner la loi de S_n et préciser son espérance et sa variance.
2. Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable $exp(\lambda(X_1 - \frac{1}{2}))$.
3. Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable $exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.
4. Soit $t, \lambda > 0$. Trouver une fonction f_t telle que $P(\lambda(_n - E(S_n)) > nt) \leq e^{nf_t(\lambda)}$.
5. Soit $\lambda > 0$. Déterminer le maximum de $f_t(\lambda)$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$.