Révisions ÉquaDiff - exercices Correction partielle

1. Résoudre les équations différentielles suivantes, et préciser sur quel intervalle cela a été fait :
   1. $y' + 2y = x^2$ $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$
   2. $y' + y = 2\sin x$ $y(x) = -\cos x + \sin x + Ce^{-x}$
   3. $y' - y = (x+1)e^x$ $y(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})x^2/2 + x)e^x + Ce^x$
   4. $y' + y = x - e^x + \cos x$ $y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + Ce^{-x}$

   Pour chacune des équations différentielles, et $y0 \in \mathbb{R}$, justifier l'existence d'une unique solution y, telle que $y(0) = y_0$.

2. Résoudre sur un intervalle ou des intervalles à préciser les équations différentielles suivantes :
   1. $xy' - \alpha y = 0$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$
   2. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ $y(x) = \frac{C-x}{1+x^2}$
   3. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ $y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$
   4. $(x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 1$ $y(x) = \frac{C+\arctan x}{1+x^2}$
   5. $(1+e^x)y' + e^x y = (1+e^x)$ sur $\mathbb{R}$ $\frac{C+x+e^x}{1+e^x}$
   6. $(e^x-1)y' + e^x y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ $\frac{C+x}{e^x-1}$
   7. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\frac{C+\ln x}{1+\ln^2 x}$
   8. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1;1[$ $y(x) = 1 + Ce^{\arccos x}$, ce qui est équivalent à $y(x) = 1 + C'e^{-\arcsin x}$
   9. $(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$ sur $\mathbb{R}$ $y(x) = (2+\cos x)(C - \ln(2+\cos x))$
   10. $(1+\cos^2 x)y' - \sin(2x)y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$ $y(x) = \frac{C+\sin x}{1+\cos^2 x}$
   11. $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0;\pi[$ $y(x) = C\sin x + \cos x$
   12. $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$ sur $]0;\pi[$ $y(x) = Ce^{-1/\sin^2 x}$

3. Sans utiliser la méthode de la variation de la constante, déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :
   1. $y' + 2y = x^2$ $y(x) = Ce^{-2x} + x^2 - x + 1/2$
   2. $y' + y = 3x - 2$ $y(x) = Ce^{-x} + 3x - 5$

4. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + y = x^2$ $y_H(x) = ae^{-t} + bte^{-t}$, une solution particulière $y_P(x) = x^2 - 4x + 6$
2. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ cas racine simple, une solution particulière de la forme $tQ(t)e^{\alpha(t)} = 2xe^{2x}$, on trouve $x \mapsto 3xe^{2x}$, solution équation homogène, de la forme $ae2x + be^x$
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{-3x}$ cas pas racine , une sol part de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$: $x \mapsto \frac{1}{20}e^{-3x}$. solution équation homogène, de la forme $ae2x + be^x$

4. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ cas racine double $t^2Q(t)e^{\alpha(t)}$. une sol part de la forme $Q(t)t^2e^{\alpha t}$: $x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^{3x}$. SOlution homogène de la forme $ae^{3x} + bxe^{3x}$