Séries Entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1) $\sum \frac{z^n}{(n+1)(n^2+5)}$ 2) $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}+2} z^n$ 3) $\sum (-3)^n \frac{z^n}{n\ n!}$ 4) $\sum \arctan\left(\frac{n\pi}{3}\right) z^n$

5) $\sum \tan\left(\frac{n\pi}{3}\right) z^n$ 6) $\sum \frac{e^{-n}}{n} z^{n^2}$ 7) $\sum a_n z^n$ où $a_n = 2^n$ si n pair et $a_n = 3^n$ sinon

8) $\sum \ln(n!) z^n$

Exercice 2 : Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

1) $\sum_{n\geqslant 0} (n^2+1)x^n$ 2) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{n!} z^n$ 3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ 4) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)(n-2)x^n}{n!}$

5) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$ 6) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \frac{x^n}{n}$

Exercice 3 : Développer en série entière les fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{2x}\cos x$ 2) $f(x) = \sin^3 x$ 3) $f(x) = \ln \frac{2-x}{3-x^2}$ 4) $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)}$

5) $f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$

Exercice 4 : Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^3}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes : $\sum a_n z^{3n}$, $\sum a_n^2 z^n$, $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 6 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme f.
Soit $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$.
On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 7 : Soit $(a_n)_n$ la suite définie par : $a_0 = 1, a_1 = \frac{7}{6}, a_2 = \frac{41}{36}$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = \frac{11}{6}a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{6}a_n$.
On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et S sa somme.

1. Montrer que : $\forall n, |a_n| \leqslant \frac{7}{6}\ 3^n$. Qu'en déduit-on pour R ?
2. Calculer $S(z)$ lorsque $|z| < R$.
3. En déduire R et l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 8 : Montrer que : $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 9 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 10 : On pose : $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Sans calculs, justifier que f est développable en série entière ne comportant que des puissances impaires et préciser le rayon de convergence.
Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
En déduire les coefficients de son développement en série entière.
Calculer : $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 11 : On considère l'équation différentielle (E) : $4xy''+2y'+y=0$. Montrer que (E) admet une unique solution f développable en série entière telle que : $f(0)=1$. Reconnaître f.

Exercice 12 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, telle que :
$\forall n\in\mathbb{N}, a_n>0$ et $\sum a_n$ diverge. On note $f : x\in]-1,1[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.
1) Montrer que : $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$.
2) Soit $\sum b_n x^n$ une série entière vérifiant $a_n\sim b_n$, et g sa fonction somme.
Montrer que : $f(x)\underset{x\to 1}{\sim} g(x)$.

Exercice 13 : Soit $(a_n)_n$ une suite réelle qui converge vers 1.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{a_n}{n!}x^n$.
On note f sa somme. Montrer que : $f(x)\underset{+\infty}{\sim} e^x$.

Exercice 14 : Justifier l'existence de $I=\int_0^1 \ln t\ln(1-t)dt$. Utiliser le développement en série entière de $\ln(1-t)$ pour calculer I. On donne : $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.