Exercice Supplémentaires
Oscillateurs CORRECTION

Exercice : oscillateur de courant

1) Si l'impédance d'entrée du bloc de gain G est infinie, alors son courant d'entrée est nul.

2) Soit U le potentiel d'entrée du bloc de gain G ; celui de sortie vaut donc GU. La loi des nœuds, en entrée du bloc de gain G, avec $I_e = 0$, mène à :

$$\frac{GU - U}{R_1 + \frac{1}{C_1 p}} = C_2 p\,(U - 0) + \frac{U - 0}{R_2} + I_e \quad \Rightarrow \quad (G - 1)\,U\frac{C_1 p}{1 + R_1 C_1 p} = C_2 pU + \frac{U}{R_2}.$$

En multipliant par R_2 :

$$(G - 1)\,U\frac{R_2 C_1 p}{1 + R_1 C_1 p} = (1 + R_2 C_2 p)\,U \;\Rightarrow\; (G - 1)\,R_2 C_1 pU = (1 + R_1 C_1 p)\,(1 + R_2 C_2 p)\,U.$$

On ordonne les termes : $\left(1 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 - (G - 1)\,R_2 C_1)\,p + R_1 C_1 R_2 C_2 p^2\right)\,U = 0.$

Attendu qu'aux bornes du dipôle $R_1 C_1$, $GU - U = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 p}\right) I$, soit $U = Z_{eq} I$, l'intensité du courant I obéit à la même équation différentielle que la tension U :

$$\boxed{R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 - (G - 1)\,R_2 C_1)\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = 0}.$$

3) Le montage est instable et oscille dès que $(R_1 C_1 + R_2 C_2 - (G - 1)\,R_2 C_1) < 0$, soit $\boxed{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} < G}$.

4) À la limite où G tend vers $1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$ par valeurs supérieures, on obtient un système décrit par $R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0$, c'est-à-dire un oscillateur sinusoïdal de pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$,

donc de fréquence $\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}}$.

Exercice : oscillateur sinus cosinus

$\boxed{1}$ Comme l'ALI ① fonctionne en régime linéaire, alors $V_{1\ominus} = V_{1\oplus} = V_3$, aussi égal à la tension aux bornes de R_1. De plus, comme il est idéal, R_1 et C_1 sont parcourus par le même courant et forment donc un pont diviseur de tension. On en déduit

$$\frac{\underline{V_3}}{\underline{V_1}} = \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}C_1\omega}} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\underline{V_1}}{\underline{V_3}} = \frac{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}{\mathrm{j}R_1C_1\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{H_1} = \frac{1+\mathrm{j}\omega\tau_1}{\mathrm{j}\omega\tau_1}}\,.$$

> *Bien sûr, utiliser la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée ⊖ de l'ALI ① conduit au même résultat en à peine plus de calculs.*

Comme l'ALI ② est idéal, la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée ⊖ s'écrit

$$\frac{\underline{V_1} - 0}{R_2} + \frac{\underline{V_2} - 0}{1/\mathrm{j}C_2\omega} = 0$$

car $V_{2\ominus} = V_{2\oplus} = 0$ grâce au fonctionnement linéaire. On en déduit

$$\frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = -\frac{1}{\mathrm{j}R_2C_2\omega} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{H_2} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau_2}}\,.$$

Enfin, comme l'ALI ① est idéal alors la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée ⊕ donne

$$\frac{0 - \underline{V_3}}{1/\mathrm{j}C_3\omega} + \frac{\underline{V_2} - \underline{V_3}}{R_3} = 0\,.$$

Ainsi,

$$\mathrm{j}C_3\omega\,\underline{V_3} + \frac{\underline{V_3}}{R_3} = \frac{\underline{V_2}}{R_3} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\underline{V_3}}{\underline{V_2}} = \frac{1}{\mathrm{j}R_3C_3\omega + 1} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\underline{H_3} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\tau_3}}\,.$$

> *Une autre possibilité de démonstration (plus subtile) est d'identifier un diviseur de tension entre C_3 et R_3, qui donne directement*
>
> $$\frac{\underline{V_3}}{\underline{V_2}} = \frac{1/jC_3\omega}{1/jC_3\omega + R_3}\,.$$
>
> *En revanche, une mauvaise idée serait d'exprimer $\underline{H_3} = 1/\underline{H_1}\underline{H_2}$: cela reviendrait à supposer l'existence d'oscillations à la pulsation ω, et donc à utiliser sans s'en rendre le critère de Barkhausen. Une autre façon de constater le problème serait de réaliser que ni la résistance R_3 ni le condensateur C_3 n'interviennent à aucun endroit du calcul, ce qui voudrait dire qu'ils ne jouent aucun rôle dans le montage ... avouez que ce serait surprenant !*
>
> *Par ailleurs, on constate que l'on obtient une fonction de transfert de type passe-bas du premier ordre. Pour le comprendre, on peut imaginer redessiner le montage en « déplaçant » la résistance R_3 à l'horizontale devant le condensateur C_3. On trouve alors que le bloc n'est autre qu'un filtre RC passe-bas.*

$\boxed{2}$ Supposons qu'il y ait oscillations à pulsation ω. En combinant les fonctions de transfert,

$$\underline{V_3} = \underline{H_3}\,\underline{V_2} = \underline{H_3}\,\underline{H_2}\,\underline{V_1} = \underline{H_3}\,\underline{H_2}\,\underline{H_1}\,\underline{V_3}$$

ce qui redonne le critère de Barkhausen

$$\underline{H_3}\,\underline{H_2}\,\underline{H_1} = 1$$

et en remplaçant

$$\frac{1}{1+\mathrm{j}\tau_3\omega} \times \frac{-1}{\mathrm{j}\tau_2\omega} \times \frac{1+\mathrm{j}\tau_1\omega}{\mathrm{j}\tau_1\omega} = 1\,.$$

On réduit à une équation algébrique,

$$-(1+\mathrm{j}\tau_1\omega) = -\tau_1\,\tau_2\,\omega^2(1+\mathrm{j}\tau_3\omega)$$

et on peut alors identifier deux conditions, sur les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} 1 = \tau_1\,\tau_2\,\omega^2 \\ \tau_1\omega = \tau_1\,\tau_2\,\tau_3\,\omega^3 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \tau_1\,\tau_2\,\omega^2 = 1 \\ \tau_2\,\tau_3\,\omega^2 = 1 \end{cases}$$

On déduit de ces deux équations

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\,\tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2\,\tau_3}}}\,,$$

ce qui impose comme condition d'oscillation

$$\boxed{\tau_1 = \tau_3\,.}$$

> *Pour revenir sur le raisonnement mené pour déterminer $\underline{H_3}$, on constate ici que la relation $\underline{H_3}\,\underline{H_2}\,\underline{H_1} = 1$ n'est pas toujours vraie, mais seulement si $\tau_1 = \tau_3$. On comprend donc d'autant mieux qu'il est faux de l'utiliser a priori pour calculer $\underline{H_3}$ en toute généralité.*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Le déphasage $\Delta\varphi$ entre les tensions V_2 et V_1 est égal à l'argument de la fonction de transfert

$$\underline{H_2} = \frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau_2} = \frac{\mathrm{j}}{\omega\tau_2}\,.$$

Il s'agit d'un imaginaire pur à partie imaginaire positive, son argument vaut donc

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\,.}$$

Or $\cos x = \sin(x + \pi/2)$: si l'une des tensions est décrite par un cosinus, l'autre l'est par le sinus, ce qui justifie le nom du montage.

Exercice : oscillateur à retour LR

Cet exercice est ardu, non pas car il serait intrinsèquement difficile, mais parce qu'il n'est pas guidé, et requiert une grande autonomie.

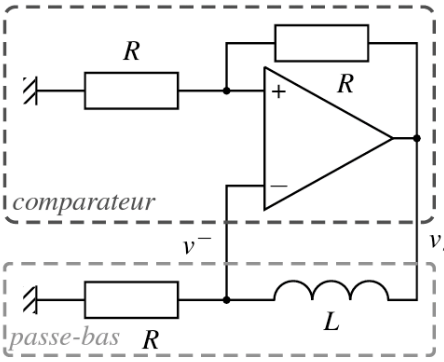
On reconnaît un oscillateur à relaxation par la présence du comparateur à hystérésis (AO et deux résistances bouclées sur la borne non inverseuse). Le comparateur et le passe-bas communiquent *via* les fils de potentiels v^- et v_s.

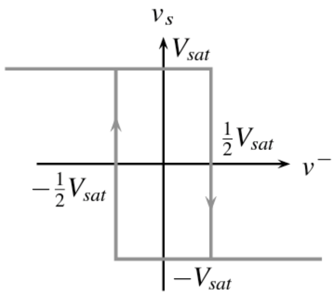
Le comparateur est décrit par son cycle d'hystérésis $v_s\left(v^-\right)$. La loi des nœuds, appliquée à l'entrée non-inverseuse, avec $i^+ = 0$, mène à :

$$\frac{0 - v^+}{R} = \frac{v^+ - v_s}{R} + i^+ \quad \Rightarrow \quad v^+ = \frac{1}{2}\, v_s .$$

La sortie du comparateur vaut $v_s = +V_{sat}$ tant que $\varepsilon = v^+ - v^- > 0$, soit $\frac{1}{2}\, V_{sat} > v^-$; elle vaut $v_s = -V_{sat}$ tant que $\varepsilon = v^+ - v^- < 0$, soit $-\frac{1}{2}\, V_{sat} < v^-$; d'où le cycle tracé ci-dessous.

Le passe-bas est décrit par sa fonction de transfert ou son équation différentielle, obtenue *via* la loi des nœuds à l'entrée inverseuse impose, avec $I^- = 0$:

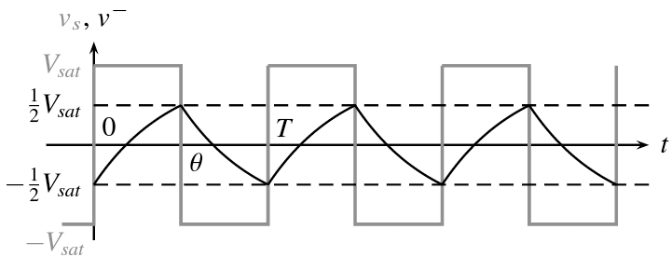




$$\frac{V_s - V^-}{Lp} = \frac{V^- - 0}{R} + I^- \quad \Rightarrow \quad RV_s = (R + Lp)\, V^-,$$

d'où $\dfrac{L}{R}\dfrac{\mathrm{d}v^-}{\mathrm{d}t}(t) + v^-(t) = s(t)$ (on posera dans la suite $\dfrac{L}{R} = \tau$).

Lorsque le montage oscille, v_s présente des créneaux d'amplitude V_{sat} ; quant à v^-, c'est la réponse classique d'un passe-bas du 1er ordre.



Sur $[0, \theta]$, $v_s(t) = +V_{sat}$ et $v^-(t) = V_{sat} + \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. On choisit arbitrairement l'origine des temps lors d'une commutation vers le haut et donc, par lecture du cycle d'hystérésis :

$$v^-(0) = -\frac{1}{2}V_{sat} = V_{sat} + \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{2}V_{sat},$$

alors $v^-(t) = V_{sat}\left(1 - \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$. En $t = \theta$, lors d'une commutation vers le bas :

$$v^-(\theta) = \frac{1}{2}V_{sat} = V_{sat}\left(1 - \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = \tau\ln(3).$$

On en déduit dès maintenant $T = 2\tau\ln(3)$, qu'on retrouve en poursuivant le calcul sur $[\theta, T]$, où $v_s(t) = -V_{sat}$ et $v^-(t) = -V_{sat} + \mu\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. La condition initiale est ici en $t = \theta$:

$$v^-(\theta) = \frac{1}{2}V_{sat} = V_{sat} + \mu\exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{3}{2}V_{sat}\exp\left(\frac{\theta}{\tau}\right),$$

alors $v^-(t) = V_{sat}\left(-1 + \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right)\right)$. En $t = T$, lors d'une commutation haute :

$$v^-(T) = -\frac{1}{2}V_{sat} = V_{sat}\left(-1 + \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{T-\theta}{\tau}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad T = \theta + \tau\ln(3) = 2\tau\ln(3).$$

Exercice : générateur de balayage

$\boxed{1}$ Les courants d'entrée d'un ALI idéal sont **nuls**, et son gain est **infini**.

> *Je pense que c'est la réponse attendue, ceci dit la question n'a pas lieu d'être car on peut aussi modéliser un ALI idéal par un système du premier ordre de gain fini.*

$\boxed{2}$ La rétroaction de **l'ALI 2** ne se fait que sur son entrée $\oplus$, il fonctionne donc nécessairement en régime de saturation.

$\boxed{3}$ On constate sur l'oscillogramme que la tension u de sortie de l'ALI 1 est comprise entre -3 et $3\,\mathrm{V}$, or s'il fonctionnait en régime de saturation elle ne pourrait prendre que les valeurs $\pm V_{\mathrm{sat}} = \pm 15\,\mathrm{V}$. On en déduit que **l'ALI 1 fonctionne en régime linéaire**.

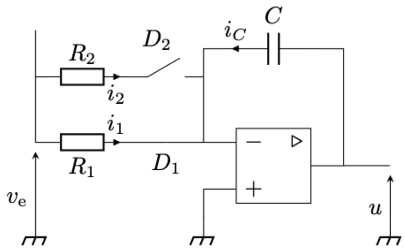


Figure 3 – Schéma partiel de l'ALI 1.

$\boxed{4}$ Utilisons la loi des nœuds à l'entrée $\ominus$ de l'ALI 1, qui est idéal. Comme il fonctionne en régime linéaire, $v_- = v_+ = 0$. Avec les notations de la figure 3,

$$i_1 + i_2 + i_C = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} i_1 = \dfrac{v_e - v_-}{R_1} = \dfrac{V_0}{R_1} \\ i_2 = 0 \\ i_C = C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u - v_-) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Attention ! Les dipôles doivent bien être orientés en convention récepteur !

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{V_0}{R_1 C} \qquad \text{d'où} \qquad u(t) = -\frac{V_0}{R_1 C}t + \text{cte}\,.$$

À l'instant initial,

$$u(0) \underset{\text{CI}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \underset{\text{sol}}{\overset{\uparrow}{=}} \text{cte}$$

et finalement

$$\boxed{u(t) = -\frac{V_0}{R_1 C}t\,.}$$

$\boxed{5}$ On applique de même la loi des nœuds à l'entrée $\oplus$ de l'ALI 2. En orientant tous les courants vers l'entrée $\oplus$ (et avec des notations évidentes !!),

$$i_3 + i_4 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{u - V_+}{R_3} + \frac{v_s - V_+}{R_4} = 0$$

d'où on déduit

$$V_+ = \frac{\dfrac{u}{R_3} + \dfrac{v_s}{R_4}}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{V_+ = \frac{R_4 u + R_3 v_s}{R_3 + R_4}\,.}$$

On conserve $v_s = V_0$ tant que $V_+ > V_- = 0$. Il y a donc basculement à t_1 tel que

$$\frac{R_4 u(t_1) + R_3 V_0}{R_3 + R_4} = 0 \qquad \text{soit} \qquad u(t_1) = -\frac{R_3}{R_4}V_0\,.$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{t_1 = \frac{R_1 R_3 C}{R_4}\,.}$$

6 La tension aux bornes du condensateur, qui est toujours continue, est égale à $u - v_- = u$.

7 Posons $t' = t - t_1$. Le raisonnement est identique à la question 4, mais comme $v_s = -V_0$ alors c'est D_2 qui est fermé et donc R_2 qui intervient dans le calcul. La relation différentielle est donc

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'} = +\frac{V_0}{R_2 C} \qquad \text{d'où} \qquad u(t') = +\frac{V_0}{R_2 C}t' + \mathrm{cte}'\,.$$

À l'instant $t' = 0$ (c'est-à-dire $t = t_1$), et par continuité,

$$u(t'=0) \underset{\underset{\text{CI}}{\uparrow}}{=} -\frac{R_3}{R_4}V_0 \underset{\underset{\text{sol}}{\uparrow}}{=} \mathrm{cte}'\,.$$

Finalement,

$$\boxed{u(t') = \frac{V_0}{R_2 C}t' - \frac{R_3}{R_4}V_0 \qquad \text{soit} \qquad u(t) = \frac{V_0}{R_2 C}(t - t_1) - \frac{R_3}{R_4}V_0\,.}$$

Comme $t_1 = R_1 R_3 C / R_4$,

$$\boxed{u(t) = \frac{V_0}{R_2 C}t - \frac{R_3}{R_4}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)V_0\,.}$$

La tension s'annule à l'instant

$$t_2 = \frac{C R_2}{V_0} \times \frac{R_3}{R_4}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)V_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{t_2 = \frac{R_3}{R_4}(R_1 + R_2)C\,.}$$

8.a Comme les oscillations sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (cf. l'oscillogramme) et par définition de t_2 (deuxième annulation de u),

$$\boxed{T = 2t_2 = 2\frac{R_3}{R_4}(R_1 + R_2)C\,.}$$

8.b À l'instant t_1,

$$u(t_1) \underset{\underset{\text{Q5}}{\uparrow}}{=} -\frac{R_3}{R_4}V_0 \underset{\underset{\text{graphe}}{\uparrow}}{=} -3\,\mathrm{V}$$

-

d'où on déduit

$$\boxed{R_3 = -\frac{R_4\,u(t_1)}{V_0} = 0{,}2\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$

De plus,

$$t_1 \underset{\underset{\text{Q5}}{\uparrow}}{=} \frac{R_1 R_3 C}{R_4} \underset{\underset{\text{graphe}}{\uparrow}}{=} 1{,}8\,\mathrm{ms}$$

et ainsi

$$\boxed{R_1 = \frac{R_4 t_1}{R_3 C} \simeq 10\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$

Enfin, la période des oscillations vaut

$$T \underset{\underset{\text{Q8.a}}{\uparrow}}{=} 2\frac{R_3}{R_4}(R_1 + R_2)C \underset{\underset{\text{graphe}}{\uparrow}}{=} 5\,\mathrm{ms}$$

d'où on déduit

$$\boxed{R_2 = \frac{T R_4}{2 R_3 C} - R_1 \simeq 3\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$