Réduction dans un e.v. euclidien

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces euclidiens.

Exercice 1 : Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales. En calculer le déterminant et la trace.

1) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $C = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Il faut vérifier à chaque fois que $M^T M = I$. Le calcul du déterminant et de la trace sert lorsqu'on doit réduire la matrice orthogonale.

Exercice 2 : Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe D orienté par le vecteur $\vec{a} = (1, 1, -1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Cette rotation laisse invariante la droite engendrée par $\vec{a}$.
On peut l'écrire dans une b.o.n $\mathcal{B}'$ contenant ce vecteur renormalisé (puis $\vec{(1, 0, 0)}$, on utilise le procédé de Gram-Scmhidt sur un élément, on obtient une famille libre de deux vecteurs unitaires, le produit vectoriel permet de compléter cette famille en une b.o.n. directe. La matrice cherchée, qui est aussi la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (on exprime les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonctions de ceux de la b.o.n. canonique) est alors $1/\sqrt{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Pour $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, calculer $a \wedge b$, $a \wedge (-b)$, $-a \wedge b$, $b \wedge a$, $a \wedge (b + c)$, $a \wedge (b - c)$, puis $(a \wedge b | a)$, $(a \wedge b | b)$.

Exercice 4 : Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Lorsque les intuitions sont absentes, tester l'énoncé sur des exemples de petites dimensions. Ici, on peut commencer par les matrices d'ordre 2, puis 3.
Les matrices cherchées sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont plus ou moins 1, ce qui se prouve par récurrence.
Puisque la norme de la première colonne de M vaut 1, et que seul le premier coefficient est non nul, il vaut ± 1. Considérons la deuxième colonne, dont les coefficients éventuellement non nuls sont les deux premiers. Puisque la première colonne est orthogonale à cette colonne, on obtient que le premier coefficient est nul. En considérant la norme on obtient que le second coefficient est égal à ± 1. On continue par récurrence.
Réciproquement, une matrice diagonale dont les coefficients sont plus ou moins 1 est bien une matrice orthogonale.

Exercice 5 : Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ représentés dans la base canonique par les matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

---

rotation horaire de 90 ° , anti-horaire de 90 ° , 180 °
Pour les matrices de taille 2, il y a deux voies, la première utilise strictement le cours et reprend l'algorithme vus à l'exercice suivant, la seconde considère qu'il suffit d'obtenir une image de la base canonique pour être fixé !

EXERCICE 6 : Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés dans la base canonique par les matrices suivantes - c'est-à-dire les étudier en suivant ces étapes :
1) vérifier qu'elles sont orthogonales (ou l'infirmer et s'arrêter là)
2) en calculer le déterminant et en déduire si elles sont directes ou indirectes
3) ces matrices sont d'ordre 3, trouver un vecteur propre et sa valeur propre associée, pour trouver un axe de rotation.
3) calculer la trace de la matrice, pour trouver le cosinus de l'angle de rotation autour de l'axe
4) utiliser les propriétés du produit vectoriel pour trouver le signe de l'angle ; et déduire cet angle.
5) présenter l'ensemble des informations trouvées dans une phrase de conclusion
$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 & -20 \\ 12 & 16 & 15 \\ 20 & -15 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ $D = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

A : orthogonale directe (déterminant : 1) Résoudre $AX = X$ permet de trouver l'axe de la rotation : Vect(a), avec l'expression matricielle de a donnée par $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a ainsi implicitement orienté le plan de rotation. Pour trouver l'angle de la rotation, on note que $\text{Tr}(A) = 1 + 2cos\theta$, soit $2 = 1 + cos\theta$ puis $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3} modulo 2\pi$. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur X, donc est la matrice d'un vecteur du plan de la rotation. On en calcule son image par A qui est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
La matrice constituée des colonnes X, Y et AY est de déterminant positif (peut s'écrire aussi : " Lorsqu'on pose $v = (1, -1, 0)$ qui est orthogonal à u, la base $u, v, f(v)$ est directe"), donc $\theta \in]0, \pi[$modulo2π, et f l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique est la rotation d'axe dirigée par $(1, 1, 1)$ d'angle $\pi/3$.

B. Le déterminant vaut 1, c'est une matrice orthogonale directe. La trace permet de trouver que $\theta = \pm\pi/2[2\pi]$. L'axe est dirigé par $(3, 4, 0)$. L'angle est négatif est vaut $\theta = -\pi/2[2\pi]$. L'endomorphisme représenté est une rotation d'angle θ du plan orthogonal à a.
C : axe dirigé par $V = (1, 1, 0)$. $\cos\theta = 1/2$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. On prend v non colinéaire à V, par exemple $(1, 0, 0)$, et on regarde le signe du déterminant dans la base canonique : $det(x, Ax, V)$: il est positif, l'angle l'est aussi. A représente dans la base canonique la rotation d'axe orienté par $[1, 0, 0]$, d'angle $\pi/3$.
D : $\cos\theta = 5/6$, $\theta = \arccos 5/6[2\pi]$. Le signe obtenu en calculant le déterminant de $[x, Ax, v]$ est négatif. B est la matrice dans la base canonique de la rotation gauche d'axe dirigé par $(1, 1, -3)$, d'angle $-\arccos 5/6$.

Exercice 7 : Orthogonale et symétrique On considère la matrice $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

La matrice M est clairement symétrique, et on vérifie qu'elle est orthogonale en vérifiant que les vecteurs colonnes sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux. Puisque M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans R, notons λ_1, λ_2 et λ_3 ses valeurs propres. Puisque M est une matrice orthogonale, $\lambda_i \in \{-1, 1\}$. De plus, on sait que M est semblable à la matrice diagonale avec λ_i sur la diagonale, elle a donc même trace, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. La seule possibilité est que 1 est valeur propre double et -1 valeur propre simple. De plus, comme M est diagonalisable, son polynôme minimal (le plus petit polynôme à l'annuler) est scindé à racines simples et vaut donc $(X-1)(X+1)$.

Exercice 8 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant $A^T A = AA^T$. Montrer que la matrice $M = (A^{-1})^T A$ est orthogonale.

Calcul, assez simple.

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.
2. Montrer que f est linéaire.

---

1. Soit une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_i)1 \leqslant i \leqslant n$. On note $\mathcal{B}'$ la famille $(f(e_i))$. Alors $\forall i, j, (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$: $\mathcal{B}'$ est une b.o.n.
2. Soient x et y dans E, $||f(\lambda x+y) - \lambda f(x) - f(y)||^2 = (f(\lambda x+y) - \lambda f(x) - f(y)|f(\lambda x+y) - \lambda f(x) - f(y)) = (f(\lambda x+y)|f(\lambda x+y)) + (\lambda f(x)+f(y)|\lambda f(x)+f(y)) - 2(\lambda f(x)+f(y)|f(\lambda x+y))$ par linéarité et symétrie du produit scalaire.
D'après l'énoncé, $(f(\lambda x+y)|f(\lambda x+y)) = (\lambda x+y|\lambda x+y)$, et, par linéarité du produit scalaire, et la même prorpiété de f, $(\lambda f(x)+f(y)|\lambda f(x)+f(y)) = (\lambda x+y|\lambda x+y)$ et $(\lambda f(x)+f(y)|f(\lambda x+y)) = (\lambda x+y|\lambda x+y)$. Ainsi $||f(\lambda x+y) - \lambda f(x) - f(y)||^2 = 0$. Par définie positivité de la norme, on en déduit que $f(\lambda x+y) = \lambda f(x) + f(y)$.
Ceci étant valable pour tout x et tout y de E, on en déduit que f est linéaire.

Exercice 10 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice réelle orthogonale.

Montrer que $\left| \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$.

Pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$, $X^T AX = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}$. Or $X^T AX = (X|AX)$, $||X|| = \sqrt{n}$ et $||AX|| = ||X||$, puisque A est orthogonale. L'inégalité de CS permet alors de conclure.

EXERCICE 11 : Soit u et v deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien orienté. Quels sont les isométries vectorielles qui envoient u sur v ?

La rotation d'angle $(\widehat{u,v})$ est l'unique rotation qui convient.
Si $u = v$, la réflexion qui envoie u sur v est la réflexion par rapport à Vect(u).
Si $u \neq v$, la reflexion qui envoie u sur v est la réflexion par rapport à Vect$(u - v)^{\perp}$.

EXERCICE 12 : Soient une réflexion σ et une rotation r du plan. Montrer que $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$. À quelle condition σ et r commutent ?

Pour le premier point, on remarque que $\sigma \circ r$ est une isométrie indirecte du plan, donc une réflexion, ce qui implique que $(\sigma \circ r) \circ (\sigma \circ r) = \text{id}$, puis, par composition à droite par r^{-1}, que $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$
Second point : la commutativité s'écrit $\sigma \circ r = r \circ \sigma$. En composant à gauche par σ, on obtient : $r = \sigma \circ r \circ \sigma$. Ainsi $r = r^{-1}$, ce qui n'est possible que si l'angle θ de la rotation plane r est $0[\pi]$.
Inversement, on constate que la condition est suffisante pour assurer la commutativité.

Ainsi, une réflexion σ et une rotation r ne commutent que si et seulement si r est l'identité ou une symétrie centrale.

EXERCICE 13 : Montrer que l'ensemble des matrices d'ordre n muni du produit scalaire usuel est somme directe orthogonale des matrices symétriques et des matrices antisymétriques d'ordre n.

Soit A une matrice, alors $A = 1/2(A + A^T) + 1/2(A - A^T)$.
Soient A symétrique et B antisymétrique, alors $(A|B) = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}(AB)$ et, par symétrie du produit scalaire $(A|B) = (B|A) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(-BA) = -\text{tr}(BA) = -\text{tr}(AB) = -(A|B)$, d'où $(A|B) = 0$, puis, A et B étant quelconques, ces sous-espaces sont orthogonaux.

EXERCICE 14 :
Soit $A = (a_{i,j})$. Déterminer $\underset{M=(m_{i,j})\in S_n(\mathbb{R})}{inf} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$, où l'ensemble des matrices est muni de son produit scalaire usuel.

L'ensemble des matrices d'ordre n est somme directe orthogonale des matrices symétriques et des matrices antisymétriques d'ordre n. D'après le théorème de projection orthogonale, et puisque la borne inférieure se fait en variant M parmi les matrices symétriques, la quantité recherchée est alors $\delta = d(A, S_n(\mathbb{R}))$, avec $\delta^2 = ||A - p_{S_n(\mathbb{R})}(A)||^2 = ||1/2(A - A^T)||^2 = 1/4 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i, j - a_{j,i})^2$.

endomorphismes symétriques

EXERCICE 15 : Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que $f \circ g$ est symétrique si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

On raisonne sur les matrices de f et g dans une b.o.n. On note A et B ces matrices. Alors $(AB)^T = AB$ si et seulement si, ces matrices étant symétriques, $BA = AB$.

EXERCICE 16 : Soit a un vecteur unitaire, k un réel différent de 0 et -1, u l'endomorphisme défini par : $\forall x \in E, u(x) = k(x|a)a + x$.

1. Montrer que u est bijectif.
2. Montrer que u est symétrique. Déterminer ses éléments propres.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de k, u est-il une isométrie ? Caractériser géométriquement u dans ce cas.

---

1) L'énoncé affirme que u est un endomorphisme, ce qui est aisément vérifiable. Sa bijectivité peut ainsi être montrée par trivialité de son noyau.
Soit donc x dans le noyau de u. Alors $k(x|a)a = -x$, ce qui implique que x et a sont colinéaires. Le vecteur a étant unitaire, il existe alors λ réel, tel que $x = \lambda a$. L'égalité précédente devient $k\lambda a = -\lambda a$, avec $k \neq -1$. Nécessairement $\lambda = 0$, puis $x = 0$.
L'endomorphisme u est de noyau trivial, il est donc bijectif.
2) Soient x et y dans E. $(u(x)|y) = (k(x|a)a + x|y) = k(x|a)(a|y) + (x|y) = (x|u(y))$: ceci étant valable pour tous x et y, l'endo. u est symétrique.
Soit x dans E éléments propre de u. Il existe alors λ tel que $k(x|a)a + x = \lambda x$.
Alors $\lambda = k+1$, et x est colinéaire à a. Les vecteurs propres associés à l'unique valeur propre $k+1$ sont tous les vecteurs non nuls coliénaires à a.
3) Pour que u soit une isométrie, il faut que k soit nul ou égal à -2. Dans ce dernier cas, u est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.

EXERCICE 17 : Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A avec une matrice de passage orthogonale.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\chi_A(x) = -x^3 - 12x^2 - 21x - 10$ dont les racines sont -1 (racine double) et -10 (racine simple).
La matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, avec une matrice de passage orthogonale.

Une base de vecteurs propre est $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$

Les s.e.p. associé à des v.p. sont orthogonaux, pour obtenir une b.o.n. de vecteurs propres, il ne reste qu'à normaliser le vecteur de $E_{-10}(A)$ en $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ puis à obtenir une b.o.n. de $E_{-1}(A)$, par le procédé de Gram-Schmidt.
Autre possibilité, au calcul peut-être plus aisé pour certains : on normalise un vecteur non nul de $E_{-1}(A)$ et un vecteur non nul de $E_{-10}(A)$, et on obtient un troisième vecteur orthogonal à ces deux vecteurs (déjà orthogonaux entre eux, puis que les s.e.p. d'une matrice symétrique sont orthogonaux deux-à-deux) et unitaire. Ces trois vecteurs forment donc une b.o.n.

Disposant de trois vecteurs propres orthogonaux deux-à-deux, on en déduit la matrice P dont les colonnes sont ces vecteurs, et D matrice diagonale aux coefficients diagonaux les valeurs propres des vecteurs propres (dans le même ordre). La matrice P est bien orthogonale, et $A = PDP^{-1}$.

Exercice 18 :

1. **Question classique :** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T AX \geqslant 0) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+.$$

   On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, i.e vérifiant cette propriété.
2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = C^T C$. Montrer que : $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que : $\mathrm{tr}(A^2) \leqslant (\mathrm{tr}(A))^2$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer l'existence d'une matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $B^2 = A$.

---

1) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe $X \neq 0$, t.q. $AX = \lambda X$. Or $X^T AX = \lambda ||X||^2 \geqslant 0$, donc $\lambda \geqslant 0$. Inversement, A étant symétrique, il existe $P \in O(E)$ et D diagonale (à coefficents positifs) t.q. $A = PDP^{-1}$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, un calcul montre que $Y^T DY \geqslant 0$. Soit maintenant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX = Y^T PDP^{-1}Y = (P^{-1}Y)^T D(P^{-1}Y) \geqslant 0$, ce qui permet de conclure.

2) La symétrie de A est sans problème. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X^T AX = X^T C^T CX = (CX)^T (CX) = ||CX||^2 \geqslant 0$
3) A est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives.
4) A est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives !

Exercice 19 : Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que : $\mathrm{Sp}(p \circ q) \subset [0, 1]$.
(On montrera d'abord que si x est un vecteur propre de $p \circ q$ associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$, alors : $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $\lambda \|x\|^2 = (q(x)|x)$.)

Il faut suivre les indications de l'énoncé lorsqu'il y en a !
Soit x un vecteur propre de de $p \circ q$ associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$. Alors $p \circ q(\frac{1}{\lambda}x) = x \in \operatorname{Im} p \circ q \subset \operatorname{Im} p$. Ainsi $x = p(x)$
Alors $(q(x)|x) = (q(x)|p(x)) = (p \circ q(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda(x|x) = \lambda||x||^2$.
On conclut en soulignant que, q étant un projecteur orthogonal, $(q(x)|x) = (q(x)|q(x) + (x - q(x))) = (q(x)|q(x)) = ||q(x)||^2 \leqslant ||x||^2$

EXERCICE 20 : On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par : $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$.
Montrer que l'application $u : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'$ est un endomorphisme symétrique et que ses valeurs propres sont négatives.

Il faut montrer que

- Pour P de E, $\varphi(P)$ est dans E (**endo**morphisme)
- φ est linéaire (endo**morphisme**)
- Pour P et Q, $(\varphi(P)|Q) = (P|\varphi(Q))$ (symétrique, se montre par IPP)

Soit une valeur propre λ de φ, et un vecteur propre P de degré $p \leqslant n$ associé à λ. On écrit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$, et on observe qu'alors $-p(p-1)a_p - 2pa_p = \lambda a_p$, avec $a_p \neq 0$, ce qui permet de conclure.

EXERCICE 21 :

1. **Question classique :** Soit h un endomorphisme symétrique. Montrer que :
$$(\forall x \in E, (h(x)|x) \geqslant 0) \Leftrightarrow \operatorname{Sp}(h) \subset \mathbb{R}^+.$$
On dit alors que h est un endomorphisme symétrique positif et on note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.
2. Soit f et g dans $S^+(E)$. Montrer que : $\ker(f+g) = \ker(f) \cap \ker(g)$ et que $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

---

1) Version vectorielle de la première question de l'exercice 18.
Si $(\forall x \in E, (h(x)|x) \geqslant 0)$, alors pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$, $(h(x)|x) = \lambda ||x||^2 \geqslant 0$, avec $||x|| \neq 0$, d'où $\lambda \geqslant 0$.
Inversement, si toutes les v.p. de u sont positives, puisque les s.e.p. de h sont en somme directe orthogonale, tout x peut s'écrire sous la forme d'une somme $\sum x_i$ de vecteurs propres associés à des v.p. distinctes, et par linéarité de h et orthogonalité de ses s.e.p. $(h(x)|x) = \sum \lambda_i (x_i|x_i) \geqslant 0$.

2) Par double inclusion, l'une étant évidente.
Soit x, t.q. $(f+g)(x) = 0$. Alors $((f+g)(x)|x) = 0$, or c'est aussi égal à $(f(x)|x) + (g(x)|x)$, dont chaque terme est positif, et plus précisément, nul, pour que leur somme soit nulle. Ainsi $(f(x)|x) = 0$ et $(g(x)|x) = 0$. En écrivant x comme une somme de vecteurs propres (orthogonaux deux-à-deux) de f, puis par linéarité, on montre que $f(x) = 0$, puis, de même, que $g(x) = 0$.
Pour la seconde égalité, on peut montrer d'abord que pour E et F deux s.e.v. d'un e.v. euclidien (ce qui est le cas ici), $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$(*). De plus f et g sont dans $S^(E)$ (et $f+g$ est symétrique), donc le noyau de chacun est supplémentaire orthogonal de son image.
On note ensuite $F = \ker f$ et $G = \ker g$ (et ainsi $F^\perp = \mathrm{Im}\, f$ et $G^\perp = \mathrm{Im}\, g$), puis on conclut.

(*) Ce point peut constituer un exercice en lui-même !
On se rappelle qu'on est en dimension finie, ce qui justifie que $(F^\perp)^\perp = F$, pour F un s.e.v. de E.
Puisque $F \cap G \subset F$, $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. De même $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$, d'où $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
On dispose également des inclusions $F^\perp \subset F^\perp + G^\perp$ et $G^\perp \subset F^\perp + G^\perp$ qui impliquent les inclusions $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset F$ et $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset G$, puis $(F^\perp + G^\perp)^\perp \subset F \cap G$, et enfin $(F \cap G)^\perp \subset F^\perp + G^\perp$.
Par double inclusion, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
La seconde égalité se prouve en prenant $F' = F^\perp$ et $G' = G^\perp$
En notant $F_1 = F^\perp$ et $G_1 = G^\perp$, on obtient $(F_1^\perp + G_1^\perp)^\perp \subset (F_1^\perp)^\perp \cap (G_1^\perp)^\perp$, et, puisque tous ces s.e.v. sont de dimension finie, ceci permet d'obtenir l'égalité suivante : $(F_1^\perp + G_1^\perp) = (F_1 \cap G_1)^\perp$, valable pour tous s.e.v. F_1 et G_1.