# Réduction dans un e.v. euclidien

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces euclidiens.

Exercice 1 : Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales. En calculer le déterminant et la trace.
1) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $C = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe $D$ orienté par le vecteur $\vec{a} = (1, 1, -1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 3 : Pour $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, calculer $a \wedge b$, $a \wedge (-b)$, $-a \wedge b$, $b \wedge a$, $a \wedge (b + c)$, $a \wedge (b - c)$, puis $(a \wedge b|a)$, $(a \wedge b|b)$.

Exercice 4 : Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Exercice 5 : Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ représentés dans la base canonique par les matrices suivantes
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 : Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés dans la base canonique par les matrices suivantes - c'est-à-dire les étudier en suivant ces étapes :
1) vérifier qu'elles sont orthogonales (ou l'infirmer et s'arrêter là)
2) en calculer le déterminant et en déduire si elles sont directes ou indirectes
3) ces matrices sont d'ordre 3, trouver un vecteur propre et sa valeur propre associée, pour trouver un axe de rotation.
3) calculer la trace de la matrice, pour trouver le cosinus de l'angle de rotation autour de l'axe
4) utiliser les propriétés du produit vectoriel pour trouver le signe de l'angle ; et déduire cet angle.
5) présenter l'ensemble des informations trouvées dans une phrase de conclusion
$A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 & -20 \\ 12 & 16 & 15 \\ 20 & -15 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ $D = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 7 : Orthogonale et symétrique On considère la matrice $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M$ est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que $M$ est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.