# Produit scalaire et orthogonalité

**Exercice 1 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $R_n[X]$.

$\longrightarrow$ Point rédaction :
**Etape 1 - On annonce ce que l'on va faire** Montrons que pour $n$ entier naturel, $(P,Q) \mapsto \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $R_n[X]$. (on peut reformuler tant que le sens n'est pas modifié).

**Etape 2 - On le fait : ici, il faut prouver que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.**

- $\star$ La fonction $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ : c'est bien une forme. (Si on oublie ce "petit détail", comment montre-t-on ensuite la positivité ?)
- $\star$ Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $R_n[X]$. Alors (on montre que, toujours en argumentant si besoin - ici, c'est assez direct) $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$. (Conclusion partielle, éventuellement à souligner, en fonction de la longueur du raisonnement) La fonction $\varphi$ est donc symétrique.
- $\star$ Soient $P_1$, $P_2$ et $Q$ trois polynômes de $R_n[X]$. Alors (on montre que ) $\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \varphi(P_1, Q) + \lambda\varphi(P_2, Q)$ (et on argumente : ici, c'est grâce à la linéarité de la somme finie). Puisque $\varphi$ est symétrique, cette fonction est alors bilinéaire.
- $\star$ Soit $P$ un polynôme de $R_n[X]$ (Un peu marre d'écrire "soit $P$"... ? On aurait aussi pu commencer par "Soient $P_1$, $P_2$, $P$ et $Q$ quatre polynômes et $\lambda$ un réel", puis montrer chaque point). Alors (montrer que ) $\varphi(P,P) \geqslant 0$.

---

**Exercice 2 :** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthogonal du s.e.v. $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices diagonales.

$\longrightarrow$ On cherche à déterminer l'orthogonal du s.e.v. des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c-à-d l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_((\mathbb{R})n)$, telles que pour toute matrice diagonale $D$, on ait (pour le produit scalaire usuel) $(M|D) = 0$.
Soit $M$ une telle matrice. En particulier, pour $D_i$ la matrice diagonale possédant un 1 en $i$ème position et des 0 sur le reste de la diagonale, on a $(M|D_i) = M_{i,i} = 0$. Ceci étant valable pour tout $i$ de 1 à $n$, on en déduit que la diagonale de $M$ **doit être** nulle.

☞On effectue ici un raisonnement par "analyse et synthèse". Cela veut dire qu'on met à jour d'abord des conditions **nécessaires** pour que $M$ soit dans l'orthogonal des matrices diagonales, mais qu'il faut ensuite vérifier que ces conditions sont **suffisantes**. Sinon, on n'a fait que la moitié du travail.

Soit $M$ une matrice de diagonale nulle. Pour tout $i$, $(M|D_i) = 0$. Par bilinéarité du produit scalaire, on en déduit que pour toute matrice diagoale $D$, $(M|D) = 0$.

Ceci permet de conclure :
$\boxed{\text{l'orthogonal des matrices diagonales de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle.}}$

**Exercice 3 :** Soit $A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $(\ker A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$.

$\longrightarrow$ Montrons que $(\ker A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$.

Soit $X \in \mathrm{Im}(A^T)$ : il existe $Z$, t.q. $X = A^T Z$. Alors, pour tout $Y \in \ker A$, $(X|Y) = (A^T Z|Y) = \mathrm{tr}((A^T Z)^T Y) = \mathrm{tr}(Z^T AY) = \mathrm{tr}(Z^T(AY)) = \mathrm{tr}(Z^T 0) = 0$.
Ainsi, pour toute matrice $X$ dans $\mathrm{Im}(A^T)$, pour tout $Y$ dans $\ker A$, $(X|Y) = 0$ : l'image de $A^T$ est inclus dans l'orthogonal de $\ker A$ (on n'a pas prouvé l'égalité, seulement une inclusion !).

Par ailleurs, puisque $\dim E < +\infty$, $\dim E = \dim(\ker A) + \dim(\ker A)^\perp$ et le théorème du rang permet d'affirmer que .$\dim E = \dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}\, A^T)$. L'e.v. $\mathrm{Im}(A^T)$ est ainsi inclus dans l'e.v. $(\ker A)^\perp$, qui est de même dimension : on a donc l'égalité $\boxed{(\ker A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)}$.

---

**Exercice 4 :** Soit $A, B$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leqslant 4\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

$\longrightarrow$ Pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB + BA) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(AB) = 2\mathrm{tr}(AB)$, par propriétés de la trace.
Par inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique que $M_n(\mathbb{R})$, on a alors $(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 = 4(\mathrm{tr}(AB))^2 \leqslant 4\mathrm{tr}(A^T A)\mathrm{tr}(B^T B)$, or $A$ et $B$ sont des matrices symétriques (soit $A = A^T$ et $B = B^T$). l'inégalité devient donc $(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leqslant 4\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2)$.

---

**Exercice 5 :** Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}(M)| \leqslant \sqrt{n\ \mathrm{tr}\,(M^T M)}$.
Préciser les cas d'égalité.

$\longrightarrow$ Inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire usuel et aux matrices $M$ et $I_n$

---

**Exercice 6 :** Soit $E$ un espace préhilbertien réel, $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de $E$ tels que : $\forall x \in E, ||x||^4 = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2$. Montrer que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthogonale, puis que c'est une base orthonormée de $E$.

$\longrightarrow$ On remarque que $||x||^4 = (x|x)^2$. Alors, pour tout $j$ de 1 à $p$, $(e_j|_j)^2 = \sum i = 1^p (e_j|e_i)^2 = (e_j|_j)^2 + \sum i = 1, i \neq j^p (e_j|e_i)^2$.
Il n'y a égalité que si le deuxième terme est nul, or c'est une somme de nombres positifs : chacun est nul. Ainsi, pour tout $i \neq j$, $(e_i|e_j) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $j$, les $(e_i)_i$ sont bien deux-à-deux orthogonaux : la famille est orthogonale.
L'énoncé précise que les vecteurs sont unitaires : la famille est donc orthonormée.

Il reste à montrer qu'il s'agit d'une base. Soit $x$ un vecteur tel que $(e_1, ..., e_p, x)$ soit libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on peut se ramener au cas où $x$ est unitaire et orthogonal à chaque $e_i$. Alors $(x|x)^4 = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 = 0$, ce qui est contradictoire : un tel vecteur ne peut exister.

Par suite, $\boxed{\text{la famille } (e_i)_i \text{ est une base orthonormée}}$.

---

**Exercice 7 :** Dans $\mathbb{R}^2$, on pose : $N(x,y) = \sqrt{x^2+2xy+3y^2}$. Montrer que $N$ est une norme euclidienne. Construire une base orthonormée pour le produit scalaire associé à $N$.

$\longrightarrow$ Une identité de polarisation permet de trouver le produit scalaire associé à $N$ :
Pour tous $(x,y)$ et $(x',y')$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $((x,y)|(x',y')) = 4xx' + 2(xy'+yx') + 12yy'$. On montre aisément qu'il s'agit d'un produit scalaire (cours !), ce dont il s'ensuit que $N$ est bien une norme euclidienne : norme associée à un produit scalaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

Les vecteurs $(\frac{1}{2},0)$ et $(0,\frac{1}{\sqrt{12}})$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire.

---

**Exercice 8 :** Soit $E$ l'e.v. des suites réelles bornées. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $E$ en posant : $(u|v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.
Soit $F$ le s.e.v des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que : $F^\perp = \{0\}$. Commenter.

$\longrightarrow$ Soit $x$ dans l'orthogonal de $F$. Alors, pour toute suite $u$ nulle à partir d'un certain rang, $(x|u) = 0$. EN particulier, c'est vrai pour les suites $u^i$ dont tous les termes sont nuls à l'exception du $i$ème qui vaut 1, ce qui implique que pour tout $i$, $(x|u^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n v_n}{2^n} = x_i = 0$. La seule suite satisfaisant cela est la suite nulle (qui est bien dans l'orthogonal de $F$). Ainsi $F^\perp = \{0\}$.

En revanche, l'orthogonal de $\{0\}$ n'est pas $F$ mais $E$ entier.
**A retenir : dans le cas général, pour $F$ un s.e.v. de $E$,** $(F^\perp)^\perp \neq F$ (On dispose bien en revanche dans le cas général de l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$.)

---

**Exercice 9 :** Soient $E$ un espace euclidien et $x$ et $y$ dans $E$. Montrer que $x$ et $y$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||x+\lambda y|| \geqslant ||x||$.

$\longrightarrow$ L'implication se fait via Pythagore.
Pour le sens retour, :
Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $||x+\lambda y|| \geqslant ||x||$, alors $2\lambda(x|y) + \lambda^2||y||^2 \geqslant 0$.
Par l'absurde : si $(x|y) \neq 0$, alors $2\lambda(x|y) + \lambda^2||y||^2 \underset{\lambda\to 0}{\sim} 2\lambda(x|y)$ change de signe lorsque $\lambda \to 0$.
Par suite $(x|y) = 0$

---

**Exercice 10 :** Soit $p$ un projecteur d'un espace préhilbertien $E$. Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E, \langle x|p(x)\rangle \geqslant 0$.

$\longrightarrow$ Par double implication :
Le projecteur $p$ est orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $(x - p(x)|p(x)) = 0$, ce qui implique la conclusion cherchée.

D'autre part, soient $y \in \ker(p)$ et $x \in \operatorname{Im}(p)$. Alors $p(y) = 0$ et $p(x) = x$. Ainsi, et ce quelles que soient les valeurs de $x$ et $y$, on a $(x+y|p(x+y)) = (x|x) + (y|x) \geqslant 0$ et $(x-y|p(x-y)) =$

$(x|x) - (y|x) \geqslant 0$. En faisant varier la norme de $y$, on constate que ceci implique nécessairement $(x|y) = 0$, autrement dit, l'image et le noyau de $p$ sont orthogonaux.

---

**Exercice 11 :** Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
On considère les s.e.v $F = \{f \in E / \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\}$ et $G = \{g \in E / \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$.
Montrer que : $F^\perp = G$. $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires ?

$\longrightarrow$ Montrons que $F^\perp = G$. Soit $g \in G$ et $f \in F$. Alors $\forall t \in [-1,0], f(t) = 0$, et $\forall t \in [0,1], g(t) = 0$, donc $\forall t \in [0-1,1], (fg)(t) = 0$.
Alors, pour le produit scalaire usuel sur les fonctions continues sur $[-1,1]$, $(f|g) = 0$ (intégrale de la fonction nulle sur un segment) : $f$ et $g$ sont orthogonales. Ceci étant vrai pour tout $f \in F$ et tout $g \in G$, $F$ et $G$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $G \subset F^\perp$.

**Attention !** *cela ne suffit pas pour affirmer que $F^\perp = G$. Pour le moment, on n'a prouvé que l'inclusion $G \subset F^\perp$. L'égalité demande l'autre inclusion, c'est-à-dire qu'il faut montrer également que pour tout $g \in F^\perp, g \in G$.*

Soit maintenant $g \in F^\perp$. Montrons que $g \in G$.
Soit $f$ quelconque in $F$. Alors $(f|g) = 0$.
En particulier, si $g$ est nulle en 0, on considère la fonction $f$ égale à $g$ sur $[0,1]$, et nulle ailleurs : cette fonction es bien dans $F$.
Si $g$ est non nulle en 0, on peut supposer sans perte de généralité que $g(0) > 0$. Par continuité de $g$ en 0, il existe $\eta > 0$, t.q. si $|x| < \eta$, alors $g(x) > 0$. On définit alors la fonction par : si $x > 0$, $f(x) = 0$ ; si $x \in [0,\eta], f(x) = \dfrac{x}{\eta} g(\eta)$, sinon, $f(x) = g(x)$. La fonction $f$ est bien dans $F$.
Dans les deux cas, on constate que $(f,g)$ est l'intégrale d'une fonction continue positive, qui ne vaut 0 que si cette fonction est nulle partout.
Dans le second cas, il reste à montrer que $g$ est nulle en 0, ce qui se fait par continuité de $g$.
Ce raisonnement étant valable pour tout $g \in F^\perp$, on en déduit que $F^\perp \subset G$.

Par double inclusion, $\boxed{F^\perp = G}$.

Cela ne suffit pas à assurer que $F$ et $G$ sont supplémentaires. La fonction $x \mapsto 1$ est bien une fonction de $E$, et pourtant on ne peut l'écrire comme somme d'une fonction de $F$ et d'une fonction de $G$.

**A retenir : l'orthogonal d'un s.e.v. n'est pas nécessairement son supplémentaire.**

---

**Exercice 12 :** Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) / \int_0^{+\infty} f^2(x)e^{-x}dx \text{ converge} \right\}$.
1) Montrer que $E$ est un e.v. qui contient la fonction $x \mapsto e^{-x}$ et les fonctions polynomiales.
2) Montrer que la fonction $(f,g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$ définit un produit scalaire sur $E$.
3) Calculer $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}dx$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
4) Déterminer le projeté orthogonal de $f : x \mapsto e^{-x}$ sur le s.e.v. $E_2$ des fonctions polynomiales de degré au plus 2.

$\longrightarrow$ 1) Il faut montrer que les fonctions sont définies et continues, et que l'intégrale converge :

continuité de la fonction à intégrer, comportement aux bornes.
2) Forme bilinéaire symétrique définie positive. Utilise la linéarité de l'intégrale (Attention à bien justifier l'existence à chaque fois). Intégrale d'une fonction positive est positive et n'est nulle que si la fonction est nulle.
3) IPP itérée et calcul pour $n = 0$. On fait extrêmement attention à l'existence de chaque intégrale. On donne un nom à l'intégrale, en fonction de $n$. Par exemple, $I_n$. Alors $I_0 = \frac{1}{\alpha}$ et $I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$ pour tout $n > 0$, ce dont on déduit que pour tout $n$, $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.
4) Le projeté orthogonal de $f : x \mapsto e^{-x}$ sur $E_2$, qu'on peut noter $p_F(f) = ax^2 + bx + c$, satisfait $(f - p_F(f)|1) = 0$, $(f - p_F(f)|X) = 0$ et $(f - p_F(f)|X^2) = 0$. C'est un système de trois équations à trois inconnues.
On trouve : $p_F(x) = x^2/16 - x/2 + 7/8$.

---

**Exercice 13 :** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, calculer le projeté orthogonal du vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3)$ sur le plan vectoriel engendré par $\vec{a} = (1, -1, 1)$ et $\vec{b} = (1, 1, 0)$

$\longrightarrow$ On se rappelle que si $p_F(u)$ est le projeté orthogonal sur le plan en question, et peut s'écrire $\lambda a + \mu b$, alors $u - p_F(u)$ est orthogonal à tout vecteur de ce plan, et en particulier, avec $a$ et $b$, ce qui nous donne un système linéaire ($(u - \lambda a - \mu b|a) = 0$ et $(u - \lambda a - \mu b|a) = 0$). La résolution de ce système linéaire permet de trouver que $\lambda = 2/3$, $\mu = 3/2$, soit $p_F(u) = (13/6, 5/6, 2/3)$

---

**Exercice 14 :** Dans $\mathbb{R}^4$, on note $p$ la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F$ d'équations : $x + y + z + t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0$. Ecrire la matrice de $p$ dans une base bien choisie, puis sa matrice dans la base canonique.

$\longrightarrow$ Une projection sur un sous espace de dimension 2 d'un espace de dimension 4 a pour matrice dans une base adaptée $Diag(1, 1, 0, 0)$ (on prend pour base $u_1, u_2, u_3, u_4$, avec $u_1$ et $u_2$ dans son image et $u_3$ et $u_4$ dans son noyau).

Les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$ et $(1, 2, 3, 4)$ sont orthogonaux à $F$, non liés, et forment donc une base de $F^\perp$ (on est en dimension finie). On peut utiliser ces deux vecteurs pour calculer le projeté sur $F$, puisque $u = p_F(u) + p_{F^\perp}(u)$ (rappel : dimension finie seulement !)

On calcule le projeté de $(1, 0, 0, 0)$ en résolvant le système formés des deux équations suivantes : $((1, 0, 0, 0) - \lambda(1, 1, 1, 1) - \mu(1, 2, 3, 4)|(1, 1, 1, 1)) = 0$ et $((1, 0, 0, 0) - \lambda(1, 1, 1, 1) - \mu(1, 2, 3, 4)|(1, 2, 3, 4)) = 0$. Le projeté sur $F$ vaut alors $(1, 0, 0, 0) - \lambda(1, 1, 1, 1) - \mu(1, 2, 3, 4)$. On trouve $\lambda = 1$ et $\mu = -3/10$. Ceci permet de calculer la première colonne de la matrice de $p$ dans la base canonique, puisqu'alors $p(e_1) = (3/10, -4/10, -1/10, 2/10) = 3/10e_1 - 4/10e_2 - 1/10e_3 + 2/10e_4$. On fait ensuite de même pour $e_2$, $e_3$ et $e_4$.

☞A la recherche d'une erreur de calcul, on vérifie par exemple que le projeté trouvé est bien dans $F$ (que ses coordonnées satisfont bien les équations qui le définissent).

---

**Exercice 15 :** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant muni du produit scalaire usuel, montrer que les s.e.v $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ (formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques) sont orthogonaux, puis qu'ils sont supplémentaires.
On prend : $n = 2$. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $S_2(\mathbb{R})$.

$\longrightarrow$
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Alors $(S|A) = \text{tr}\left(S^T A\right) = \text{tr}\,(SA)$. Par ailleurs, $(A|S) = \text{tr}\left(A^T S\right) = \text{tr}\,(-AS) = -\text{tr}(AS)$. Par symétrie du produit scalaire, $(S|A) = -(S|A) = 0$ : les s.e.v $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont donc bien orthogonaux.

Un argument de dimension permet de conclure : effet, $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim A_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\dim M_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n^2}{2}$, or $n^2 = n(n+1) + n(n-1)$.

On pouvait aussi prendre $M$ de $M_n(\mathbb{R})$ et l'écrire $M = (M + M^T) + (M - M^T)$. On vérifie sans peine qu'il s'agit de la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

On considère maintenant le cas $n = 2$.

*Rappel :* $d(M, S_2(\mathbb{R})) = ||M - p_{S_2(\mathbb{R})}(M)||$.
D'après ce qui précède, $M - p_{S_2(\mathbb{R})}(M) = p_{A_2(\mathbb{R})}(M) = M - M^T$.
Alors $d(M, S_2(\mathbb{R})) = ||M - M^T|| = \sqrt{\text{tr}((M - M^T)^T(M - M^T))} = \sqrt{2\text{tr}(M^T M) - 2\text{tr}(MM)}$.
(*Etape de vérification ? Si $M$ est symétrique, la distance est bien nulle. C'est bon signe !*).

---

**Exercice 16 :** Justifier l'existence du réel : $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx)^2 \, dx$.
$E = \mathcal{C}^0\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ est muni du produit scalaire usuel. Donner une interprétation géométrique de $m$, puis calculer cette valeur.

$\longrightarrow$ Soient $a$ et $b$ réels. Alors $x \mapsto (x^3 - ax^2 - bx)^2$ est continue sur $[0,1]$, on peut donc l'y intégrer.
On pose maintenant $G = \{\displaystyle\int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx)^2 \, dx, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. L'ensemble $G$ est un ensemble de nombres positifs, qui est non vide, puisqu'il contient par exemple $\displaystyle\int_0^1 (x^3)^2 \, dx$. C'est donc un ensemble non vide, minoré (par 0). Ceci prouve l'existence de la borne inférieure de $G$.

Posons $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 x^2 (f(x)g(x))^2 \, dx$. Alors $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. Alors $m = d(X^2, F) = ||X^2 - p_F(X^2)||$, où $F$ est le s.e.v. de $E$ composé des polynômes de degré au plus 1 (s.e.v. des fonctions affines).

Pour déterminer la valeur de $m$, soit on considère que $\left(X^2 - p_F(X^2)|1\right) = 0$ et $\left(X^2 - p_F(X^2)|X\right) = 0$, ce qui, puisqu'il existe $\alpha$ et $\beta$ t.q. $p_F(X^3) = \alpha + \beta X$, mène à un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre ; soit on calcule (par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) une base orthonormée de $\text{Vect}(1, X)$, puis on utilise la formule de décomposition d'un vecteur sur une b.o.n.

---

**Exercice 17 :** Déterminer : $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 - a - bx)^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$. (On pourra munir l'e.v. $E = \mathcal{C}^0\left([-1,1], \mathbb{R}\right)$ d'un produit scalaire adapté.)

$\longrightarrow$ $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}\, dx$ - On cherche ici encore la distance de $X^2$ aux fonctions affines.

---

**Exercice 18 :** Soit $u$ un endomorphisme d'un e.v. euclidien $E$ tel que : $\forall x \in E, (x|u(x)) = 0$.
1) Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, (y|u(x)) = -(x|u(y))$.
2) Soit $A$ la matrice représentative de $u$ dans une B.O.N $\mathcal{B}$. Montrer que $A$ est antisymétrique.
3) On suppose de plus : $u \circ u = -\mathrm{id}_E$. Montrer que $u$ est une isométrie vectorielle.

$\longrightarrow$
1) Soient $x$ et $y$. Alors $(x + y|u(x + y)) = 0$. Or, par bilinéarité du produit scalaire, c'est aussi égal à $(x|u(x)) + (y|u(x)) + (x|u(y)) + (y|u(y))$. D'après l'énoncé, le premier et le quatrième terme de cette somme sont nuls. On en déduit que $\forall (x, y) \in E^2, (y|u(x)) = -(x|u(y))$.
2) On pose $A = (a_{i,j})_{i,j}$. Alors, dans la b.o.n. $(e_i)_i$, $a_{i,j} = (u(e_i)|e_j) = -(e_i|u(e_j)) = -a_{j,i}$ : la matrice est antisymétrique.
3) On doit montrer ici que $u$ conserve la norme, c-à-d que pour tout $x$ de $E$, $||u(x)|| = ||x||$. D'après ce qui précède, $||u(x)||^2 = (u(x)|u(x)) = -(x|u \circ u(x)) = (x|x) = ||x||^2$. La norme étant à valeurs positives, on en déduit que, pour tout $x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$ : $u$ est bien une isométrie vectorielle.

---