Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $R_n[X]$.

Exercice 2 : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthogonal du s.e.v. $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices diagonales.

Exercice 3 : Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $(\ker A)^{\perp} = \mathrm{Im}(A^T)$.

Exercice 4 : Soit A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leqslant 4\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 5 : Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}(M)| \leqslant \sqrt{n\ \mathrm{tr}\,(M^T M)}$.
Préciser les cas d'égalité.

Exercice 6 : Soit E un espace préhilbertien réel, $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que : $\forall x \in E, ||x||^4 = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2$. Montrer que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthogonale, puis que c'est une base orthonormée de E.

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^2$, on pose : $N(x,y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$. Montrer que N est une norme euclidienne. Construire une base orthonormée pour le produit scalaire associé à N.

Exercice 8 : Soit E l'e.v. des suites réelles bornées. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant : $(u|v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.
Soit F le s.e.v des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que : $F^{\perp} = \{0\}$. Commenter.

Exercice 9 : Soient E un espace euclidien et x et y dans E. Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||x + \lambda y|| \geqslant ||x||$.

Exercice 10 : Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E, \langle x|p(x)\rangle \geqslant 0$.

Exercice 11 : Soit $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
On considère les s.e.v $F = \{f \in E / \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\}$ et $G = \{g \in E / \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$.
Montrer que : $F^{\perp} = G$. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 12 : Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) / \int_0^{+\infty} f^2(x)e^{-x}dx \text{ converge} \right\}$.
1) Montrer que E est un e.v. qui contient la fonction $x \mapsto e^{-x}$ et les fonctions polynomiales.
2) Montrer que la fonction $(f,g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$ définit un produit scalaire sur E.
3) Calculer $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}dx$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
4) Déterminer le projeté orthogonal de $f : x \mapsto e^{-x}$ sur le s.e.v. E_2 des fonctions polynomiales de degré au plus 2.

Exercice 13 : Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, calculer le projeté orthogonal du vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3)$ sur le plan vectoriel engendré par $\vec{a} = (1, -1, 1)$ et $\vec{b} = (1, 1, 0)$

Exercice 14 : Dans $\mathbb{R}^4$, on note p la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F d'équations : $x + y + z + t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0$. Ecrire la matrice de p dans une base bien choisie, puis sa matrice dans la base canonique.

Exercice 15 : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant muni du produit scalaire usuel, montrer que les s.e.v $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ (formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques) sont orthogonaux, puis qu'ils sont supplémentaires.
On prend : $n = 2$. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $S_2(\mathbb{R})$.

Exercice 16 : Justifier l'existence du réel : $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx)^2 \, dx$.
$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel. Donner une interprétation géométrique de m, puis calculer cette valeur.

Exercice 17 : Déterminer : $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 - a - bx)^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$. (On pourra munir l'e.v. $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire adapté.)

Exercice 18 : Soit u un endomorphisme d'un e.v. euclidien E tel que : $\forall x \in E, (x|u(x)) = 0$.
1) Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, (y|u(x)) = -(x|u(y))$.
2) Soit A la matrice représentative de u dans une B.O.N $\mathcal{B}$. Montrer que A est antisymétrique.
3) On suppose de plus : $u \circ u = -\mathrm{id}_E$. Montrer que u est une isométrie vectorielle.

Exercice 19 : $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Soit $f : \vec{x} \mapsto (\vec{u} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire. Ecrire la matrice de f dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ dont le premier vecteur est $\vec{u}$. Reconnaître f.

Exercice 20 : Soit E un e.v. euclidien de dimension 2 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit f l'endomorphisme de E tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ et φ la symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1)$.
Reconnaître la nature géométrique de f. Montrer qu'il existe deux symétries orthogonales φ_1 et φ_2 telles que $f = \varphi_1 \circ \varphi = \varphi \circ \varphi_2$. Préciser leur axe et leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 21 : Soit u un endomorphisme orthogonal d'un e.v. euclidien E (c-à-d un automorphisme qui conserve le produit scalaire : pour tous x et y, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$) tel que : $\mathrm{rg}(u - \mathrm{id}_E) = 1$. Montrer que u est une symétrie orthogonale.