Feuille 17 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1 : Soit $l^1(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série associée soit absolument convergente. Montrer que l'application $u \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ est une norme sur $l^1(\mathbb{K})$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose : $\forall P \in E, \|P\| = \sup_{t\in[0,1]} \big|P(t) - P'(t)\big|$.
Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

Exercice 3 : Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\forall (A,B) \in E^2, \|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, on pose : $N((x,y)) = \sqrt{x^2 + xy + 2y^2}$. Montrer que N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : On note : $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on pose :
$\forall f \in E, N_1(f) = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$ et $N_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$.
1) Démontrer que N_1 est une norme sur E.
On admet que N_2 est aussi une norme.
2) Soit $f \in E$ et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans (E, N_1) si et seulement si elle converge vers f dans (E, N_2).
3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [[0,1], f_n(t) = t^n$. Montrer que cette suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans $(E, \|\cdot\|_1)$ mais pas dans (E, N_1).

Exercice 6 : Soit une suite u dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On suppose que les trois suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent. Démontrer que la suite u converge.

Exercice 7 : Théorème de Césaro Soit $(u_n)_n$ une suite dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. La moyenne de Césaro de u est la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. On suppose que la suite u converge vers $\vec{0}$. Démontrer que v converge vers $\vec{0}$.
2. Qu'en déduit-on si u converge vers un vecteur l ?

Exercice 8 : Etudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par : 1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+3y^2}$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ 3) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$
4) $f(x,y) = \dfrac{\sin x \sin y - \sin(xy)}{x^2+y^2}$

Exercice 9 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie de E non vide et non égale à E. On note χ_A sa fonction indicatrice, définie par : $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon. Montrer que χ_A n'est pas continue sur E (on pourra considérer une fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \chi_A((1-t)x + ty)$, avec x et y bien choisis).

Exercice 10 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Justifier qu'on définit une norme sur E en posant : $\forall u \in E, \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On considère l'application $T : u \in E \mapsto v$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que u est un endomorphisme de E et que u est continue sur E.

Exercice 11 : Soit $(E, \| \|)$ un evn, $a \in E, r \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte de centre a et de rayon r est la boule fermée de centre a et de rayon r.

Exercice 12 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soient A et B deux parties non vides de E telles que $A \subset B$. Montrer que : $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Prouver par un contre-exemple dans $\mathbb{R}$ que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vérifiée.

Exercice 13 :

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que : $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2y^3 + \ln\left|x^2 + y^2 + 1\right| = 1\right\}$ est une partie fermée.
2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des matrices diagonales est une partie fermée de E.
3. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$ est-elle une partie fermée ? une partie ouverte ?
4. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On pose : $A = \left\{f \in E / f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3\right\}$.
   Montrer que A est une partie fermée de E.

Exercice 14 : On note K_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0, 1]$.
1) Démontrer que K_n est une partie convexe, bornée et fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\| \cdot \|$ une norme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'existence d'une matrice N dans K_n telle que : $\forall M \in K_n, \|A - N\| \leqslant \|A - M\|$.

Exercice 15 : On note $\mathcal{D}_2$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathcal{M}_2$.
Soit $\Omega = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a - d)^2 + 4bc > 0\right\}$ et $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a - d)^2 + 4bc \geqslant 0\right\}$.
1) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2$.
2) Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathcal{D}_2 \subset F$.
3) $\mathcal{D}_2$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2$? un ouvert de $\mathcal{M}_2$? Justifier.