

Différents Formulaires

Pour simplifier les calculs

Table des matières

1	Alphabet Grec dans l'écriture scientifique	3
2	Formulaire Trigonométrique	4
3	Formulaire de trigonométrie hyperbolique	5
4	Dérivées des fonctions usuelles	6
5	Autour des Primitives	8
5.1	Tableau des primitives usuelles	8
5.2	Opérations usuelles	10
6	Autour des développements limités	11
6.1	Règles de calculs sur les développements limités	11
6.2	Tableau des développements limités usuels	13
6.3	Développements limités obtenus par intégration	14
7	Les développements en séries entières usuels à connaître ou à savoir retrouver	15
7.1	Variable complexe	15
7.2	Variable réelle	15
7.2.1	Obtenu par la série exponentielle	15
7.2.2	Obtenu par la méthode de l'équation différentielle	15
7.2.3	Obtenu par intégration du développement précédent pour α particulier .	15

1 Alphabet Grec dans l'écriture scientifique

Lettre grecque minuscule	Lettre grecque majuscule	Prononciation	Lettre latine équivalente
α	A	alpha	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	e
ζ	Z	zêta	z
η	H	êta	h
θ	Θ	thêta	q
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi ou ksi	c
$\omicron$	O	omicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	rho	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	u
ϕ	<i>Phi</i>	phi	f
χ	X	chi ou khi	x
ψ	Ψ	psi	y
ω	Ω	omega	w

2 Formulaire Trigonométrique

Formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$$

Formules d'Euler : $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Relations trigonométriques diverses :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\forall x \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Formules d'addition : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

De ces formules, on en déduit **des formules de linéarisation, de transformation de sommes en produits** :

$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

qu'il n'est pas utile de connaître par cœur mais plutôt savoir les retrouver à partir des formules d'addition.

On a aussi ;

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$$

A partir desquelles on obtient, en particulier (utile pour intégrer) :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}.$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

Définition : On appelle :
sinus hyperbolique l'application

$$\begin{aligned}\text{sh} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

cosinus hyperbolique l'application

$$\begin{aligned}\text{ch} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

tangente hyperbolique l'application

$$\begin{aligned}\text{th} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\end{aligned}$$

En utilisant les définitions de ch, sh, th, on obtient aisément les formules suivantes, pour tous x, a, b de $\mathbf{R}$:

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1 \text{ A connaître absolument.}$$

$$\text{ch}(a + b) = \text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b.$$

$$\text{ch}(a - b) = \text{ch } a \text{ ch } b - \text{sh } a \text{ sh } b.$$

$$\text{sh}(a + b) = \text{sh } a \text{ ch } b + \text{ch } a \text{ sh } b.$$

$$\text{sh}(a - b) = \text{sh } a \text{ ch } b - \text{ch } a \text{ sh } b.$$

$$\text{th}(a + b) = \frac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \text{ th } b}.$$

$$\text{th}(a - b) = \frac{\text{th } a - \text{th } b}{1 - \text{th } a \text{ th } b}.$$

$$\text{ch}(2a) = \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a = 2\text{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\text{sh}^2 a.$$

$$\text{sh}(2a) = 2 \text{ch } a \text{ sh } a.$$

$$\text{th}(2a) = \frac{2 \text{th } a}{1 + \text{th}^2 a}.$$

$$\text{ch}^2 a = \frac{\text{ch}(2a) + 1}{2}.$$

$$\text{sh}^2 a = \frac{\text{ch}(2a) - 1}{2}.$$

4 Dérivées des fonctions usuelles

f	Domaine de Définition	f'	Domaine de Dérivabilité
$x \mapsto k \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	0	$\mathbf{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$\mathbf{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{R}^*$ sinon	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{R}^*$ sinon
$\sqrt{x}$	$\mathbf{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbf{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}_+^*$
e^x	$\mathbf{R}$	e^x	$\mathbf{R}$
$\cos(x)$	$\mathbf{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$\sin(x)$	$\mathbf{R}$	$\cos(x)$	$\mathbf{R}$
$\tan(x)$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\text{Arccos}(x)$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\text{Arcsin}(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\text{Arctan}(x)$	$\mathbf{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

f	Domaine de Définition	f'	Domaine de Dérivabilité
$\text{ch}(x)$	$\boldsymbol{R}$	$\text{sh}(x)$	$\boldsymbol{R}$
$\text{sh}(x)$	$\boldsymbol{R}$	$\text{ch}(x)$	$\boldsymbol{R}$
$\text{th}(x)$	$\boldsymbol{R}$	$1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$	$\boldsymbol{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}_*^+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\boldsymbol{R}_*^+$

5 Autour des Primitives

5.1 Tableau des primitives usuelles

Dans la première colonne figure la fonction f dont on veut donner les primitives.
Dans la deuxième colonne, se trouve **une** primitive de f .
Dans la troisième colonne, se trouve le domaine de définition des primitives. En particulier, on ne peut intégrer f que sur un intervalle inclus dans ce domaine.

Fonction $f, f(x)$	Primitive $F, F(x)$	Domaine de définition de F
$e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbf{R}^*$ fixé	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{ch} \omega x \ (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{sh} \omega x \ (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \omega x$	$\mathbf{R}$
$\cos \omega x \ (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega x$	$\mathbf{R}$
$\sin \omega x \ (\omega \in \mathbf{R}^*)$	$-\frac{1}{\omega} \cos \omega x$	$\mathbf{R}$
$\tan x$ $\operatorname{th} x$	$-\ln \cos x $ $\ln \operatorname{ch} x$	$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\ (\pi)$ $\mathbf{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\ (\pi)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R} - \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbf{R}_+^*$
$x^n, n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{ax+b}, (a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$	$\frac{1}{a} \ln ax+b $	$] -\infty, -\frac{b}{a}[$ ou $]\frac{b}{a}, +\infty[$
$\frac{1}{a^2+x^2} \ (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \ (a > 0)$	$\operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$ ou $-\operatorname{Arccos} \frac{x}{a}$	$] -a, a[$

5.2 Opérations usuelles

Fonction $f, f(x)$	Primitive $F, F(x)$	Commentaires
$a f', a \text{ réel}$	$a f$	
$f' + g'$	$f + g$	
$f' f^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1}$	sur tout intervalle où $f(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\frac{f'}{f}$	$\ln f $	sur tout intervalle où $f(x) \neq 0$
$f' \times (g \circ f)$	$g \circ f$	

6 Autour des développements limités

6.1 Règles de calculs sur les développements limités

Les propriétés sont énoncées pour des développements limités au voisinage de zéro.

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de zéro admettant chacune un développement limité d'ordre n

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degré inférieur à n , qu'on appelle *parties régulières* respectivement de f et g .

Rappelons les méthodes pour obtenir les développements limités d'une somme, produit, composée et quotient :

Linéarité :

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n et

$$\lambda f(x) + g(x) = \lambda P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

Produit :

fg admet un développement limité d'ordre n et sa partie régulière s'obtient en formant le produit PQ et en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Composée :

On suppose que $f(0) = 0$.

$g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n et sa partie régulière s'obtient en ne retenant du polynôme $Q \circ P$ que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Quotient :

On suppose que $f(0) \neq 0$.

Alors $\frac{1}{f}$ admet un développement limité d'ordre n et pour l'obtenir, on écrit :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a(1 - u(x))}$$

et on effectue le $DL_n(0)$ de la composée des fonctions $u(x)$ et $\frac{1}{a} \frac{1}{1 - x}$.

Des exemples :

1) $DL_7(0)$ de $\ln(\cos(x))$:

On écrit le DL de $\cos$:

$$\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right)$$

On utilise le développement limité de $\ln(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + o(z^3)$: L'ordre 3 suffit car on l'utilise pour $z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$ et on cherche un $DL_7(0)$ par rapport à x .

Alors, finalement

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) = & -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^2 \\ & - \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^3 \\ & + o(x^7) \end{aligned}$$

On ne retient que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à 7. Il s'ensuit que :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)$$

2) $DL_5(0)$ de $\tan(x)$:

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}\end{aligned}$$

On utilise maintenant le développement limité de $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + o(z^2)$: L'ordre 2 suffit car on l'utilise pour $z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et on cherche un $DL_5(0)$ par rapport à x .

Alors, finalement

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^5)\right)\end{aligned}$$

On ne retient que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à 5. Il s'ensuit que :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

6.2 Tableau des développements limités usuels

Tous les développements limités cités ci-dessous sont au voisinage de 0.

I. Développements limités obtenus par le théorème de Taylor-Young

Ordre	DL(0)
n	$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2n+1	$\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
2n+2	$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
2n+1	$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
2n+2	$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
n	$\forall \alpha \in \mathbf{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
n	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
n	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

6.3 Développements limités obtenus par intégration

Ordre	DL(0)
n	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
n	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
2n+2	$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
2n+2	$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
2n+2	$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

7 Les développements en séries entières usuels à connaître ou à savoir retrouver

7.1 Variable complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

7.2 Variable réelle

7.2.1 Obtenu par la série exponentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

7.2.2 Obtenu par la méthode de l'équation différentielle

$$\forall x \in]-1, 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

7.2.3 Obtenu par intégration du développement précédent pour α particulier

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$