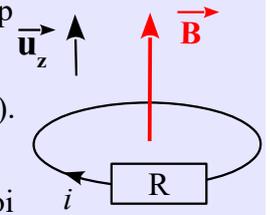


1. Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

Le circuit ci-contre possède une surface S et une résistance R . Il est soumis à un champ magnétique uniforme mais non stationnaire :

pour $t \leq 0$ $\vec{B}(t) = \vec{0}$ et $\vec{B}(t) = B(t)\vec{u}_z = B_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \vec{u}_z$ pour $t \geq 0$ (τ étant une constante).

Ce champ est perpendiculaire au plan du circuit.



1) Expliquer qualitativement les phénomènes se produisant, en utilisant notamment la loi de Lenz.

2) Établir l'expression de l'intensité $i(t)$ circulant du circuit en choisissant l'orientation de l'énoncé. vérifier l'interprétation à priori de la question 1.

3) Quel phénomène a été négligé ? Comment le prendre en compte ?

5) Écrire l'équation différentielle satisfaite par l'intensité.

Solution

1) Le champ qui traverse le circuit augmente, le circuit réagit en créant un champ magnétique induit de sens opposé, **Le sens du courant induit est le sens positif choisi de l'énoncé.**

2) On oriente la surface, le vecteur surface \vec{S} est de sens opposée à $\vec{B}(t)$. $\Phi = \vec{B}(t) \cdot \vec{S} = -B_0 S \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$.

D'après la loi de Faraday, la fem induite est telle que $e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$ d'où $e_{ind} = \frac{B_0 S}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$. On obtient

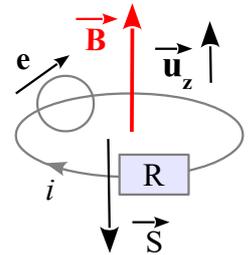
l'intensité grâce à la loi de Pouillet : $i(t) = \frac{e_{ind}}{R}$ d'où $i(t) = \frac{B_0 S}{\tau R} e^{-\frac{t}{\tau}} > 0$, on retrouve le

sens de la question

3) On a négligé le phénomène d'auto-induction, pour en tenir compte, il faut considérer l'inductance propre L du circuit.

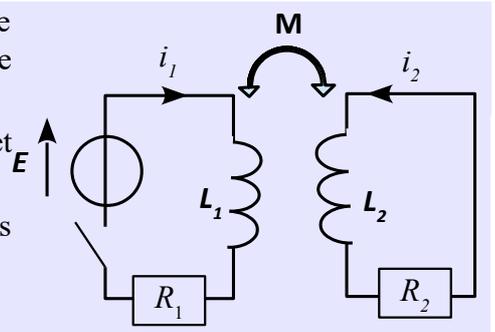
4) $\Phi_{tot} = \Phi_{ext} + \Phi_p$, $e_{tot} = -\frac{d\Phi_{ext}}{dt} - L \frac{di}{dt} = e_{ind} - L \frac{di}{dt}$ en utilisant la convention générateur.

En utilisant la loi des mailles on obtient : $Ri = e_{ind} - L \frac{di}{dt}$ d'où $L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{B_0 S}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$.



2. Couplage entre 2 bobines identiques

Soient deux circuits couplés. Pour simplifier les calculs, on suppose que le coefficient de mutuelle induction M est positif, que $L_1 = L_2 = L$ et que $R_1 = R_2 = R$. E est constant.



1. Écrire les deux équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ lorsque l'interrupteur est fermé.
2. En déduire deux équations différentielles découplées vérifiées par les variables $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$.
3. L'interrupteur est fermé à $t = 0$.
 - a) Déterminer $S(t)$ et $D(t)$. En déduire $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans le cas où M est inférieur à L .
 - b) Reprendre ce dernier calcul dans le cas limite du couplage parfait (pour $L = M$).

Solution

1) $\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ donne
 $e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$
 avec e_1 dans le sens \odot droit

Puis $E - R i_1 + e_1 = 0$ donne
 $E = R i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ (1)
 $L_1 = L_2 = L, R_1 = R_2 = R$

de même, $R i_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$ (en faisant $E=0$) (2)

2) (1+2) donne $E = R(i_1 + i_2) + L(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}) + M(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt}) = 0$
 donc en posant $S = i_1 + i_2$: $E = RS + (L+M)\dot{S}$ (3)

(1-2) donne, en posant $D = i_1 - i_2$: $E = RD + (L-M)\dot{D}$ (4)

(3) donne $S = \frac{E}{R} + \alpha e^{-t/\tau_1}$ avec $\tau_1 = R/(L+M)$

(4) donne $D = \frac{E}{R} + \beta e^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_2 = (L-M)/R$

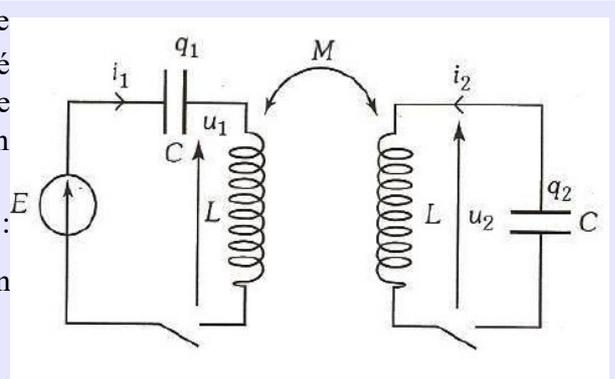
Comme i_1 et i_2 sont continues avec $i_1(0) = i_2(0) = 0$, il vient
 $S = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau_1})$ et $D = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau_2})$

3a - $i_1 + i_2 = S$
 $i_1 - i_2 = D$ } $\Rightarrow i_1 = \frac{1}{2}(S+D) = \frac{1}{2} \frac{E}{R} (2 - e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$
 $i_2 = \frac{1}{2}(S-D) = \frac{1}{2} \frac{E}{R} (e^{-t/\tau_2} - e^{-t/\tau_1})$

3b si $L=M, \tau_2=0$, (4) devient $E=RD$, (3) devient $E=RS+2L\dot{S}$
 donc $S = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{2L}t})$ $D = \frac{E}{R}$
 donc $i_1 = \frac{E}{2R}(2 - e^{-\frac{R}{2L}t})$
 $i_2 = -\frac{E}{2R} e^{-\frac{R}{2L}t}$

1. Couplage d'oscillateurs par mutuelle inductance

On s'intéresse aux 2 circuits LC ci-contre. On note M le coefficient de mutuelle inductance. Le 1^{er} circuit est alimenté par un générateur fournissant la tension $E(t)=E_0 \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé et on utilisera la notation complexe.



1) Montrer que les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ vérifient les équations : $\ddot{q}_1 + \alpha \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 + \frac{E(t)}{L} = 0$ et $\ddot{q}_2 + \alpha \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0$, où α est un coefficient à déterminer, appelé coefficient de couplage.

2) Dédire des équations précédentes, les équations vérifiées par \underline{q}_1 , et \underline{q}_2 les amplitudes complexes associées à $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

2) Exprimer \underline{q}_2 en fonction de la tension du générateur \underline{E} .

3) Montrer que $|\underline{q}_2(\omega)|$ est infinie pour deux pulsations ω_1 et ω_2 que l'on déterminera. En déduire le tracé de $|\underline{q}_2(\omega)|$. Commenter le résultat.

4) Si on réalise l'expérience, quelle sera la différence notable par rapport aux résultats obtenus ici ?

Solution : attention ! Pour calculer les pulsations de résonance on ne peut pas dire que la dérivée du dénominateur D est nul car la résonance est infini! C'est pour cette raison qu'on dit qu'à la résonance $D=0$.

a) Un phénomène d'induction se produit dans les deux circuits car les flux les traversant varient dans le temps :

$$\Phi_1 = L i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = L i_2 + M i_1.$$

$$\text{Alors, } u_1 = -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

$$\text{La loi des mailles donne : } u_1 = E + \frac{q_1}{C} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{q_2}{C}.$$

$$\text{Vu les orientations, } i_1 = -\dot{q}_1 \quad \text{et} \quad i_2 = -\dot{q}_2.$$

$$\text{Ainsi, } \ddot{q}_1 + \frac{M}{L} \ddot{q}_2 + \frac{1}{LC} q_1 + \frac{E}{L} = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{q}_1 + \alpha \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 + \frac{E}{L} = 0}$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{M}{L} \ddot{q}_1 + \frac{1}{LC} q_2 = 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{q}_2 + \alpha \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0}$$

En notation complexe, ces équations deviennent :

$$\boxed{-\omega^2 (q_1 + \alpha q_2) + \omega_0^2 q_1 + \frac{E}{L} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{-\omega^2 (q_2 + \alpha q_1) + \omega_0^2 q_2 = 0}.$$

b) On élimine alors q_1 par la seconde équation qui fournit $\alpha \omega^2 q_1 = (\omega_0^2 - \omega^2) q_2$, d'où :

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\alpha \omega^2} q_2 - \alpha \omega^2 q_2 + \frac{E}{L} = 0.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\frac{q_2}{E} = -\frac{\alpha \omega^2}{\omega_0^4 - 2\omega^2 \omega_0^2 + (1 - \alpha^2) \omega^4}}$$

c) À basse et haute pulsations, ce rapport tend vers 0. On cherche les annulations éventuelles du dénominateur. On pose $X = \omega^2$, ce qui revient à une équation du second degré en X. Le discriminant réduit est :

$$\Delta' = \omega_0^4 - \omega_0^4 (1 - \alpha^2) = \alpha^2 \omega_0^4.$$

On en déduit les pulsations conférant une amplitude infinie à q_2 :

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 \pm \alpha \omega_0^2}{1 - \alpha^2} \quad \text{soit} \quad \omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \alpha}}$$

Deux pulsations de résonances existent et on obtient l'allure du graphe de la figure 47.

Il est possible de vérifier que pour des circuits non couplés, une seule pulsation de résonance subsiste : la pulsation ω_0 du circuit LC.

$|q_2|$ reste nulle aux faibles pulsations : le couplage ne se fait pas en régime continu.

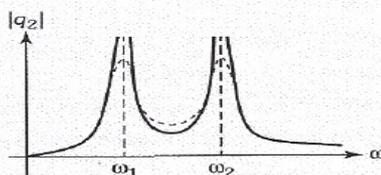


Figure 47

d) La prise en compte d'éléments dissipatifs (résistances) rend ces résonances finies (pointillés de la figure 47).



Erreur à éviter

Le signe moins provient du fait que le courant rencontre l'armature portant la charge -q.



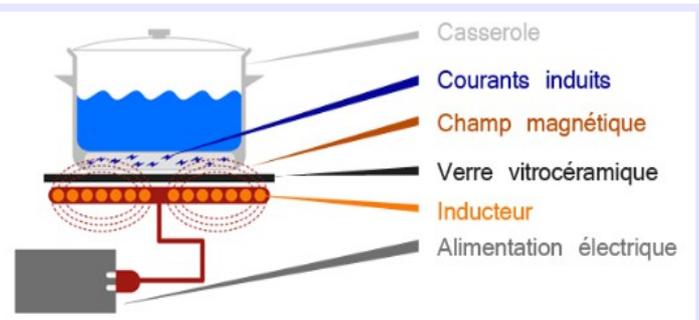
Remarque

Deux circuits possédant une pulsation de résonance sont couplés : il en résulte un unique système avec deux pulsations de résonance.

2. Chauffage par induction (V2)

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

Logé dans une plaque en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ.



Ce bobinage est soumis à une tension d'alimentation $v_1(t)$ variable sinusoïdale de valeur efficace $V_1 = 130$ V de fréquence $f = 25$ kHz. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage (l'inducteur) et la plaque circulaire formant le fond du récipient (l'induit) assimilable à une spire unique fermée. L'inducteur comporte 20 spires de rayon $R = 5,0$ cm, de résistance totale $R_1 = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega$ et d'auto-inductance $L_1 = 30 \mu\text{H}$.

L'induit est représenté par une spire unique de résistance $R_2 = 8,3$ m Ω et d'auto-inductance $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$. L'ensemble se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle M .

1. Écrire les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre les intensités i_1 et i_2 circulant dans chacun d'eux).

2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\underline{A} = \frac{I_2}{I_1}$ ainsi que l'expression littérale de

l'impédance complexe d'entrée du bobinage inducteur $\underline{Z}_e = \frac{V_1}{I_1}$.

3. Vérifier que la fréquence choisie amène à pouvoir négliger les résistances R_1 et R_2 . Simplifier les expressions littérales précédentes en conséquence puis effectuer le calcul numérique des modules de \underline{A} et \underline{Z}_e sachant que la valeur de mutuelle est estimée à $M = 2,0 \mu\text{H}$.

4. Déterminer alors la puissance dissipée dans les parties résistives du circuit inducteur et du circuit induit.

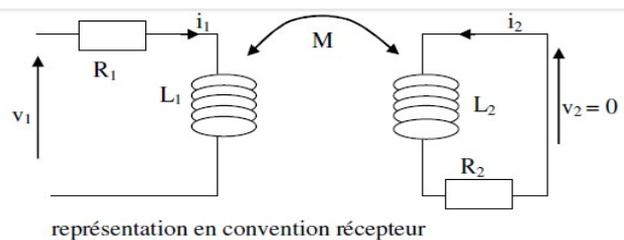
5. On soulève le récipient. Par un raisonnement qualitatif, déterminer si l'amplitude I_1 du courant appelé par l'inducteur décroît ou augmente.

Solution (Rem il manque les barres sous les grandeurs complexes)

1. Écrivons les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre les intensités i_1 et i_2 circulant dans chacun d'eux).

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et}$$

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



2. En passant en expressions complexes : $v_1 = R_1 i_1 + jL_1 \omega i_1 + jM \omega i_2$ (1)

et

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + jL_2 \omega i_2 + jM \omega i_1 \quad (2)$$

De (2) on tire :

$$i_2 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \cdot i_1$$

donc l'amplitude complexe :

$$A = i_2/i_1 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

On injecte ce résultat dans (1), d'où l'impédance complexe d'entrée du bobinage inducteur $Z_e = V_1 / I_1$.

$$Z_{e1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

3. Compte tenu de la fréquence choisie $R_1 \ll L_1.\omega$ (numériquement $R_1 = 0,018 \Omega$ et $L_1.\omega = 4,7 \Omega$) et $R_2 \ll L_2.\omega$ (numériquement $R_2 = 0,0083 \Omega$ et $L_2.\omega = 0,038 \Omega$) ce qui amène à pouvoir négliger les résistances R_1 et R_2 .
En simplifiant les expressions littérales précédentes en conséquence :

$$A = i_2/i_1 = \frac{-M}{L_2}$$

et : $v_1 = jL_1\omega i_1 + jM\omega \cdot \left(-\frac{M}{L_2}\right) \cdot i_1$

Le calcul numérique, sachant que la valeur de mutuelle est estimée à $M = 2,0 \mu\text{H}$, donne des modules de $\underline{A} = M/L_2 = 8,3$

et de

$$Z_{e1} = \omega \cdot \sqrt{\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 2,1 \Omega$$

$$Z_{e1} = \omega \cdot \sqrt{\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 2,1 \Omega$$

4. La puissance dissipée dans les parties résistives du circuit inducteur et du circuit induit sera donc :

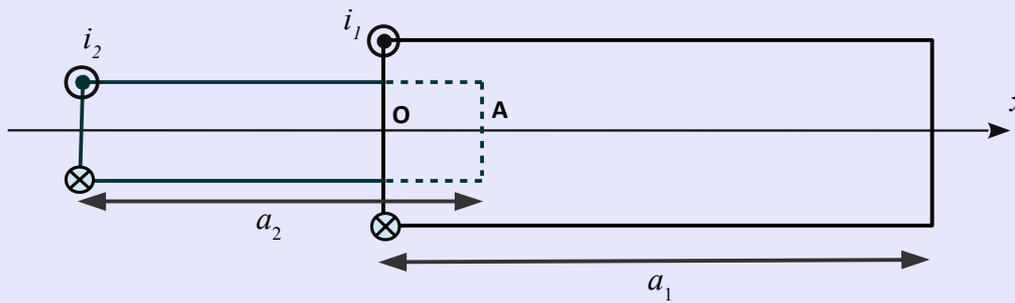
$$P_1 = R_1 I_1^2 = \frac{R_1 V_1^2}{\omega^2 \cdot \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 69,4 \text{ W}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = \frac{R_2 V_1^2 M^2}{\omega^2 \cdot (L_1 L_2 - M^2)^2} = 2,22 \text{ kW}$$

5. On soulève le récipient. Le champ magnétique créé par l'inducteur et vu par la plaque intégrée au récipient diminue. Le flux magnétique à travers cette plaque diminue et donc l'induction mutuelle M diminue. Alors l'impédance d'entrée Z_e augmente pour une même valeur de tension d'alimentation, donc la valeur efficace de l'intensité dans l'inducteur $I_1 = V_1/Z_{e1}$ va décroître. Il en sera de même pour I_2 l'intensité dans la plaque chauffante fixée au récipient.

3. Energie magnétique

On considère deux solénoïdes de longueurs a_1 et a_2 et de surface S_1 et S_2 . Pour lesquels on peut faire l'approximation des solénoïdes infinis. On suppose $a_1 > a_2$ et $S_1 > S_2$. On pose $x = \overline{OA}$



- Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.
- Déterminer le coefficient d'auto-inductance de chacun des solénoïdes et le coefficient d'inductance mutuelle en fonction de x .
- Déterminer l'énergie magnétique de l'ensemble des deux solénoïdes

Solution

solénoïde (1)
 zone ② : $\vec{B} = \vec{B}_2 = \mu_0 n_2 i_2 \vec{u}_x$ avec n_2 le nombre de spires par unité de longueur pour le solénoïde (2).

zone ③ : $\vec{B} = \vec{B}_3 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 (n_1 i_1 + n_2 i_2) \vec{u}_x$

zone ④ : $\vec{B}_4 = \vec{0}$

Pour le solénoïde (1) :
 $\Phi_{\text{propre}} = \underbrace{\mu_0 n_1 i_1 S_1}_{\text{flux à travers une spire}} \times \underbrace{n_1 a_1}_{\text{nombre de spires}} = L_1 i_1$ d'où $L_1 = \mu_0 n_1^2 a_1 S_1$

Pour le solénoïde (2) :
 De même que précédemment $L_2 = \mu_0 n_2^2 a_2 S_2$

$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \text{flux de } \vec{B}_1 \text{ à travers le solénoïde (2)}$
 $= \underbrace{\mu_0 n_1 i_1 S_2}_{\text{flux à travers une spire de (2)}} \times \underbrace{x n_2}_{\text{nombre de spires}} = M i_1$ d'où $M = \mu_0 n_1 n_2 x S_2$

Remarque : $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \text{flux de } \vec{B}_2 \text{ à travers le solénoïde (1)}$
 $= \mu_0 n_2 i_2 S_2 \times x n_1 = M i_2$
 On retrouve bien $M = \mu_0 n_1 n_2 x S_2$

© $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$