Auto-induction

Ce chapitre aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes.

1. Auto-induction

1.1. Inductance propre

Un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité i crée un champ magnétique $\vec{B}_p$ que l'on qualifie de propre, par opposition au champ extérieur $\vec{B}_{ext}$ dont il n'est pas responsable mais dans lequel il peut-être plongé.

Le flux de ce champ propre à travers le circuit (qui l'a créé) est appelé le flux propre, on le note Φ_p.

On montre que le flux propre est proportionnel à l'intensité qui circule dans le circuit: $\boxed{\Phi_p = \vec{B}_p . \vec{S} = L i}$

Le coefficient de proportionnalité est une caractéristique intrinsèque du circuit et s'appelle l'inductance propre ou coefficient d'auto-inductance:

$$\boxed{L = \frac{\Phi_p}{i}}$$, l'unité de L est le Henry (H)

Remarques :

1) L'inductance propre L est une grandeur toujours positive.(règle de la main droite)

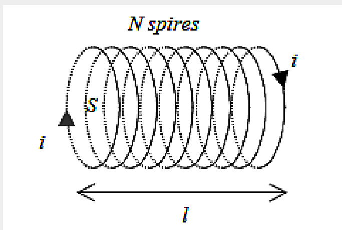
2) L'inductance propre L dépend de la géométrie du circuit et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel il est plongé.

3) Il n'est pas nécessaire qu'un circuit soit parcouru réellement par un courant pour calculer son inductance propre, il suffit d'imaginer l'existence d'un courant i quelconque et calculer le flux propre correspondant.

1.2. Calcul d'une inductance propre *(exemple de cours 1)*

Énoncé

On considère un solénoïde de longueur *l* comportant N spires régulières, supposées jointives, de section S.



Le champ magnétique propre $\vec{B}_p$ à l'intérieur du solénoïde est: $\vec{B}_p = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{u}_z$

avec $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire de l'axe du solénoïde.

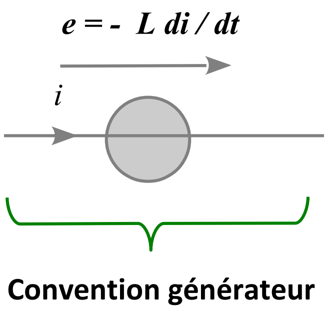
En déduire l'inductance propre du solénoïde.

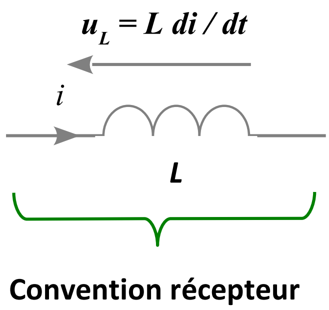
Données numériques : $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ H.m^{-1} , N = 1000, a = 3 cm le rayon du solénoïde et l = 10 cm.

Solution

1.3. Circuit électrique équivalent

Si l'intensité du courant traversant le circuit varie dans le temps, le flux propre varie et il apparaît une force électromotrice induite qui s'exprime grâce à la loi de faraday : $\boxed{e=-\frac{d\Phi_p}{dt}=-L\frac{di}{dt}}$. La fem ainsi définie est orientée dans le sens du courant. On peut représenter le schéma électrique équivalent :





On voit que la fem auto-induite peut être représentée soit par un générateur de fem *e(t)* orienté en convention générateur, soit par le symbole normalisé d'une inductance L, avec une tension $u_L(t)$ à ses bornes, orientée en convention récepteur.

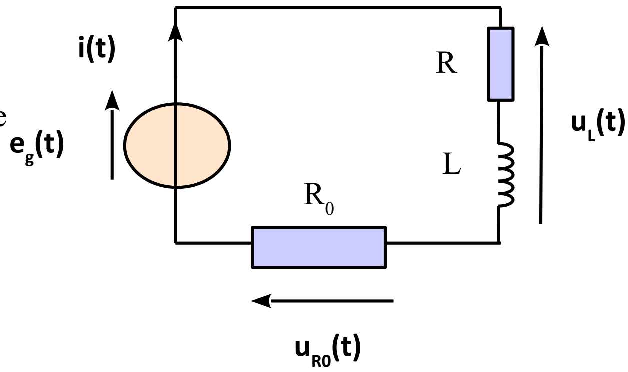
Remarque : *Loi de Lenz :*

Les formules trouvées sont conformes à la loi de Lenz. Si i croit $di/dt > 0$ et $e = - L\, di/dt < 0$. D'après le schéma électrique, cette fem s'oppose au courant.

1.4. Mesure d'une inductance propre

On mesure expérimentalement la valeur de l'inductance propre L en l'insérant dans un circuit série comportant un générateur de tension créneau $e_g(t)$ et une résistance R_0.

Le montage électrique équivalent est le suivant, les fils de cuivres constituant la bobine ayant une résistance R.



On choisit R_0 telle que $R_0 >> R$ si bien que $R + R_0 \approx R_0$

Pour $t > 0$, on applique la loi des mailles on obtient :

1.5. Étude énergétique

2. Cas deux circuits en interaction

2.1. Problème général

Dans le cas où le circuit est plongé dans un champ magnétique extérieur, par exemple le champ terrestre, le flux supplémentaire à travers le circuit s'ajoute au flux propre : $\boxed{\Phi_{tot}=\Phi_p+\Phi_{ext}}$.Dans ce cas la fem induite s'écrit : $\boxed{e=-L\frac{di}{dt}-\frac{d\Phi_{ext}}{dt}}$

Cette fem additionnelle due au champ extérieur forme un bruit électrique, par exemple dans le cas d'un téléphone portable dont la position bouge, même faiblement dans le champ terrestre.
On minimise ce bruit en éliminant toutes les inductances des circuits électroniques, sachant qu'au besoin, une inductance est simulée avec des résistances, des condensateurs et dans amplificateurs linéaires intégrés.

2.2. Cas de deux circuits en interaction

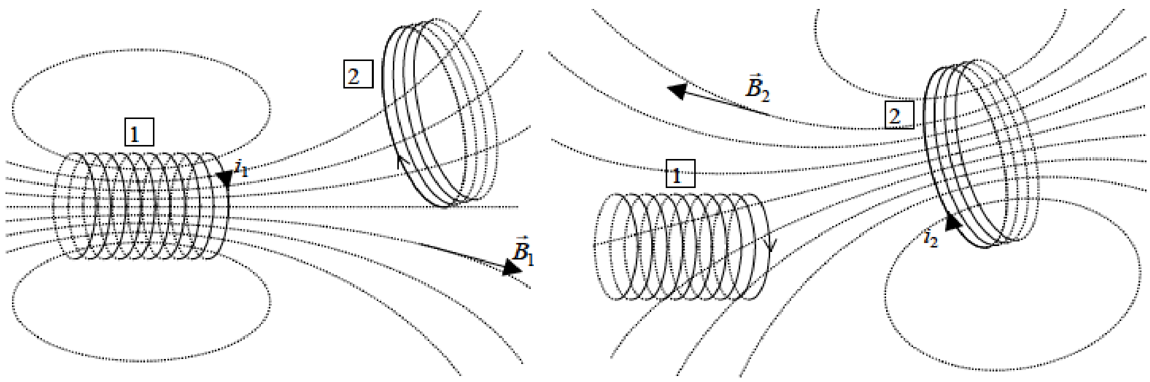
a) Inductance mutuelle

Flux de mutuelle inductance

Soient deux circuits orientés repérés par (1) et (2) tels que :

• quand le circuit (1) est parcouru par une intensité de courant i_1, le circuit (2) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique $\vec{B}_1$ crée par (1),

• quand le circuit (2) est parcouru par une intensité de courant i_2, le circuit (1) embrasse une partie (ou la totalité) du champ magnétique $\vec{B}_2$ crée par (2).



On désigne par :

- $\Phi_{1\to2}$ le flux du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers le circuit (2) : $\Phi_{1\to2}=\iint_{S_2}\vec{B}_1.\vec{dS}$

- $\Phi_{2\to1}$ le flux du champ magnétique $\vec{B}_2$ à travers le circuit (1) : $\Phi_{2\to1}=\iint_{S_1}\vec{B}_2.\vec{dS}$

Ces flux sont appelés les flux de mutuelle inductance.

Inductance mutuelle

Les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ étant respectivement proportionnels aux courants i_1 et i_2, les flux de mutuelle inductance peuvent s'écrire :

$$\boxed{\Phi_{1\to2}=M_{12}i_1} \text{ et } \boxed{\Phi_{2\to1}=M_{21}i_2}$$

Nous admettrons que les deux coefficients M_{12} et M_{21} sont égaux et désignerons par inductance mutuelle M leur valeur commune : $\boxed{M=\frac{\Phi_{1\to2}}{i_1}=\frac{\Phi_{2\to1}}{i_2}}$

La dimension d'une inductance mutuelle est celle d'une inductance propre et M se mesure donc en Henry.

Remarques :

1) Comme l'inductance propre L, l'inductance mutuelle M dépend de la géométrie des deux circuits et des propriétés magnétiques du milieu dans lequel ils sont plongés.

2) Contrairement à l'inductance propre L toujours positive, l'inductance mutuelle M est une grandeur algébrique dont le signe dépend de l'orientation des deux circuits. Si l'on inverse l'orientation d'un des deux circuits l'inductance mutuelle M est changée en son opposé.

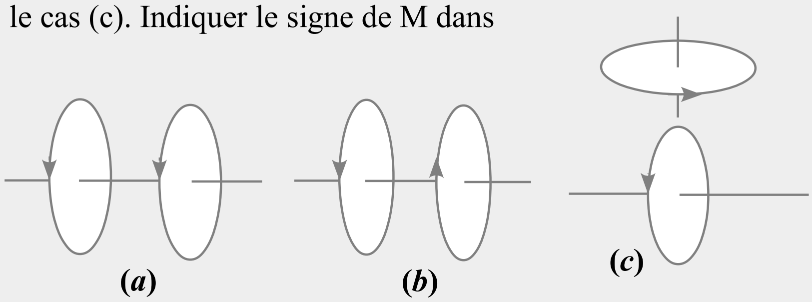
3) Nul besoin que les circuits soient parcourus réellement par des courants pour calculer leur inductance mutuelle, il suffit d'imaginer l'existence d'un courant i quelconque (i1 ou i2) et calculer le flux de mutuelle correspondant.

4) En général l'inductance mutuelle de deux circuits n'a de valeur notable que lorsqu'il s'agit de parties bobinées voisines.

b) Signe d'une inductance mutuelle *(exemple de cours 2)*

Énoncé

Deux spires orientées sont placées suivant trois dispositions (a), (b), et (c). Les spires sont coaxiales dans les cas (a) et (b) et d'axes orthogonaux dans le cas (c). Indiquer le signe de M dans chaque cas.



Solution

c) Circuit électrique équivalent

On considère les 2 circuits précédents **C₁** et **C₂**.

C₁ est parcouru par i_1. Ce courant crée un champ $\vec{B}_1$ donc un flux propre à travers (1) : $\boxed{\Phi_{p1}=L_1 i_1}$

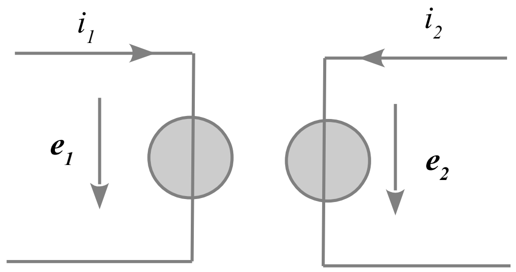
C₂ est parcouru par i_2. Ce courant crée un champ $\vec{B}_2$. $\vec{B}_2$ envoie un flux $\boxed{\Phi_{2\to1}=M\, i_2}$ à travers **C₁**.

Le flux total à travers **C₁** est donc : $\boxed{\Phi_1=L_1 i_1+M\, i_2}$

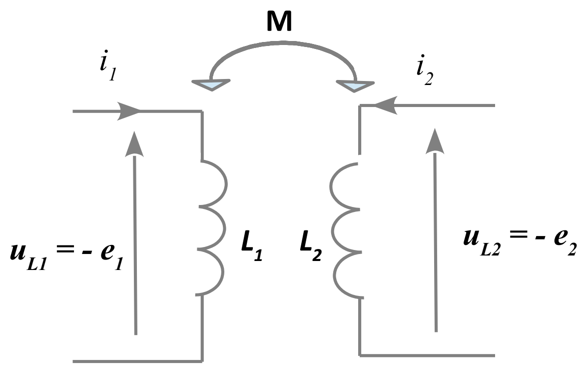
La fem induite dans **C₁** est alors : $\boxed{e_1=\frac{-d\,\Phi_1}{dt}=-L_1\frac{d\,i_1}{dt}-M\frac{d\,i_2}{dt}}$

En procédant de même pour **C₂** on obtient : $\boxed{e_2=\frac{-d\,\Phi_2}{dt}=-L_2\frac{d\,i_2}{dt}-M\frac{d\,i_1}{dt}}$

On en déduit les circuits équivalents aux 2 spires :



Convention générateur



Convention récepteur

Rem : dans le cas général on tient compte des résistances R_1 et R_2 des 2 bobinages.

d) Inductance équivalente *(exemple de cours 3)*

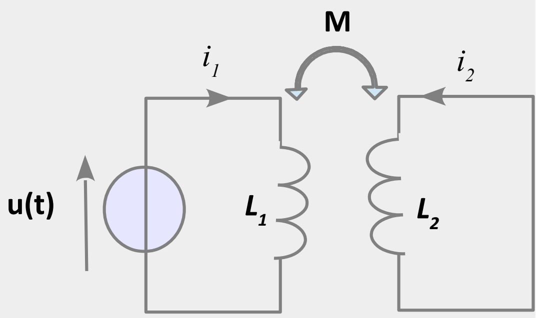
Énoncé

Un ensemble de 2 circuits couplés, non résistifs ($R_1 = R_2 = 0$) a son bobinage secondaire en court-circuit. Un générateur est branché aux bornes du circuit primaire.

Il impose la tension $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.

1) Écrire le système d'équations différentielles régissant l'évolution des intensités.

2) Éliminer de ce système $i_2(t)$ de manière à faire apparaître une relation entre u(t)et $i_1(t)$. Quel comportement a le circuit couplé vu depuis le générateur ?



3) Reprendre la mise en équation à l'aide de l'écriture complexe et retrouver la même conclusion.

Solution

2.3. Étude énergétique

On fait un bilan énergétique en tenant compte des résistances R_1 et R_2 des bobinages.

On cherche à calculer l'énergie totale emmagasinée dans le dispositif des 2 circuits couplés.

Pour ce faire, on exprime la puissance totale reçue par les 2 accès :

$p(t)=u_1(t)i_1(t)+u_2(t)i_2(t)$.

En utilisant les équations précédentes, on obtient :

$$\boxed{p(t)=R_1 i_1^2+R_2 i_2^2+L_1 i_1\frac{d i_1}{d t}+L_2 i_2\frac{d i_2}{d t}(t)+M i_1\frac{d i_2}{d t}+M i_2\frac{d i_1}{d t}}$$

- Les deux premiers termes du 2nd membre correspondent à la puissance perdue par effet joule
- Les deux termes suivants correspondent à la puissance stockée dans les 2 bobines égale à la dérivée temporelle de l'énergie stockée dans les 2 bobines ($\frac{1}{2}L_1 i_1^2+\frac{1}{2}L_2 i_2^2$) si elles étaient seules.
- Les deux derniers termes pris ensembles correspondent à la puissance mutuelle égale à la dérivée temporelle de l'énergie mutuelle (stockée de part le couplage) $M i_1 i_2$.

L'énergie magnétique totale emagasinnée à chaque instant dans le dispositif est :

$$\boxed{E_m=\frac{1}{2}L_1 i_1^2+\frac{1}{2}L_2 i_2^2+M i_1 i_2}$$

cette énergie correspond à l'énergie magnétique emmagasinée dans tout l'espace