Solution exercice 2 TD :

1. On néglige les forces de frottement donc le système est conservatif. On applique la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial où la luge franchit la ligne d'arrivée et l'instant final où elle s'arrête :

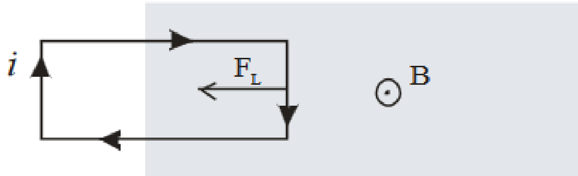
$E_m(t_i)=E_c(t_i)=\frac{1}{2}m v_a^2$ (on pose l'origine des énergies potentielles nulle à l'arrivée) . $E_m(t_f)=E_p(t_f)=m g h$ D'où

$\frac{1}{2}m v_a^2=mgh=mgL\sin\alpha$ d'où : $\boxed{L=\frac{v_a^2}{2g\sin\alpha}}$. On exprime α grâce au schéma : $\boxed{\sin\alpha=\frac{10}{\sqrt{10100}}=\frac{1}{\sqrt{101}}}$

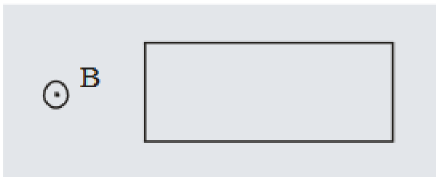
AN : $\boxed{L=\frac{900\times\sqrt{101}}{2\times10}=452\,m}$. cette méthode nécessite une piste trop longue !

2. Loi de Lenz : Le courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui lui ont donné naissance.

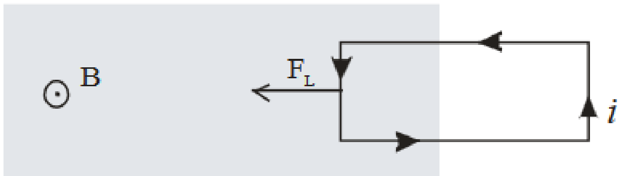
Phase1 : le cadre entre dans la zone de champs, le flux magnétique varie, un courant induit apparaît ainsi qu'une force s'opposant au mouvement. La luge ralentit.



Phase 2 : le cadre est entièrement dans la zone magnétique le flux magnétique à travers le cadre est constante. La luge a un mouvement rectiligne uniforme.



Phase 3 : le cadre sort de la zone magnétique, le flux magnétique varie de nouveau. un courant induit apparaît ainsi qu'une force s'opposant au mouvement. La luge ralentit.



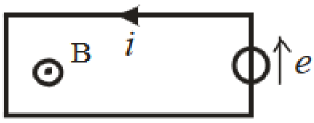
3. Un champ magnétique de 1T est intense.

Un champ magnétique uniforme sur une telle surface (50cmx100cm) est comparable aux machines médicales IRM et nécessite pour 1T un aimant supraconducteur à refroidissement à hélium liquide! Evidemment, on comprend que l'hypothèse d'un champ uniforme n'est là que pour simplifier le calcul et permettre de comprendre les

phénomènes mis en jeu, d'où la difficulté pour proposer un dispositif réaliste.

4. On oriente la surface dans le sens des z croissants. $\boxed{S=l\,x}$ Et $\boxed{\Phi=\vec{S}.\vec{B}=l\,x\,B}$

5. D'après la loi de faraday, $\boxed{e=\frac{-d\Phi}{dt}=-B\,l\,v}$.



6. D'après la loi de Pouillet : $\boxed{i=\frac{e}{R_c}=-B\,l\frac{v}{R_c}}$

7. $\boxed{d\vec{F}_L=i\,d\vec{l}\wedge\vec{B}}$

8. Schéma du bilan des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre :

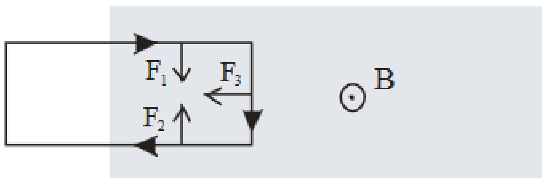


Schéma avec sens réel du courant

$\boxed{\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{0}}$. $\boxed{\vec{F}_3=\vec{F}_L=i\vec{l}\wedge\vec{B}=-i\,l\,B\,\vec{u}_x}$ d'où $\boxed{\vec{F}_L=\dfrac{-v\,l^2\,B^2}{R_c}\vec{u}_x}$. la force de Laplace est bien opposée au mouvement.

9. Sur l'axe Ox s'exerce uniquement la force de Laplace, par application de la 2ème loi de Newton, on obtient : $\boxed{m\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v\,l^2\,B^2}{R_c}=0}$.

10. L'équation du mouvement sous sa forme canonique s'écrit : $\boxed{\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v}{\tau}=0}$. par identification : $\boxed{\tau=\dfrac{m\,R_c}{l^2\,B^2}}$. AN : $\boxed{\tau=\dfrac{100\times10^{-3}}{0{,}5^2\times1^2}=0{,}4\,s}$.

11. Par intégration en considérant à $t=0$, $x=0$, on obtient : $\boxed{x(t)=\tau\,v_a\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

12. $x(\infty)=\tau\,v_a=0{,}4\times30=12\,m>L$. Le cadre pénètre totalement dans la zone magnétique.

On a $x(T)=L=\tau\,v_a\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$ d'où $\boxed{T=-\tau\ln\left(1-\dfrac{L}{\tau\,v_a}\right)}$. AN : $\boxed{T=-0{,}4\ln\left(1-\dfrac{1}{12}\right)=35\,ms}$.

13. $\boxed{v(T)=v_a e^{-\frac{T}{\tau}}=v_a\left(1-\dfrac{L}{\tau\,v_a}\right)=v_a-\dfrac{L}{\tau}}$. On en déduit : $\boxed{\Delta v=v_a-v(T)=\dfrac{L}{\tau}=\dfrac{1}{0{,}4}=2{,}5\,m.s^{-1}}$.

14. Une fois dans la zone où règne le champ magnétique, la luge a un mouvement rectiligne uniforme sa vitesse est $\boxed{v(T)=27{,}5\,m.s^{-1}}$. **La longueur idéale pour la zone de champ est L .**

15. Quand le cadre sort de la zone, il est freiné de la même façon qu'il est accéléré en rentrant dans la zone et subit une nouvelle variation de vitesse $\boxed{\Delta v=\dfrac{L}{\tau}=2{,}5\,m.s^{-1}}$.

16. A chaque zone constituée de 1m de champ et 1m sans champ, la luge perd 5m.s^{-1}. **Il faut 5 zones soit 10m de pistes.**

17. Autre freinage par induction : **freinage des TGV.**

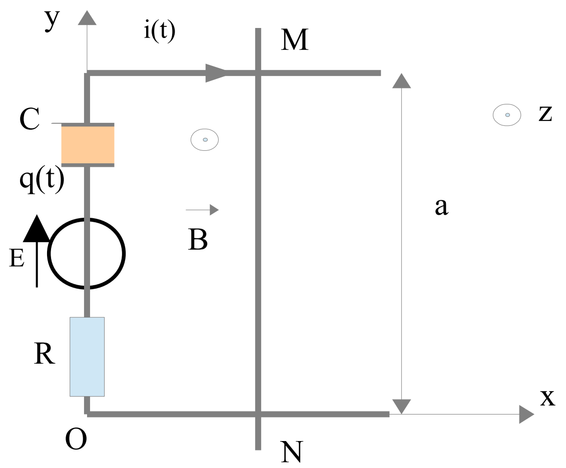
1. Barreau sur 2 rails

Une tige MN , de masse m glisse sans frottement sur 2 rails horizontaux.

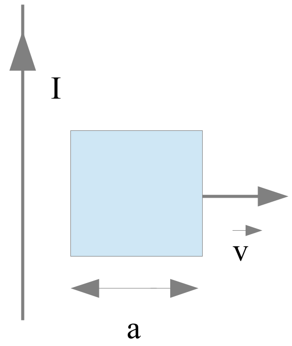
A t=0:

- sa vitesse est nulle : $\vec{V}(0) = \vec{0}$.
- Le condensateur n'est pas chargé q(0)=0.

1) Ecrire l'équation électrique du circuit.
2) Ecrire l'équation mécanique du circuit.
3) En déduire l'expression de $v(x)=\frac{dx}{dt}$



2. Cadre dans un champ magnétique variable

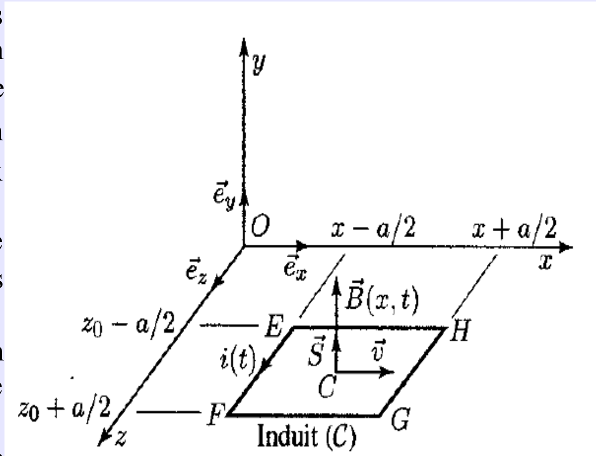


Soit un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I et un cadre carré filiforme de côté a de résistance R tel que le fil infini est dans le plan du carré. On déplace le cadre avec une vitesse $\vec{v}$ perpendiculaire au fil.

1. Déterminer la fem induite dans le cadre en négligeant le phénomène d'autoinduction
2. En déduire l'intensité i qui circule dans le cadre.

3. Cadre dans un champ magnétique variable d'après ICNA 2008

L'induit (C) d'un moteur linéaire est constitué de N spires conductrices filiformes carrées identiques de coté a, pouvant se déplacer dans un repère galiléen R($O\,x\,y\,z$) muni d'une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Ce cadre, de vecteur surface $\vec{S}=a^2\vec{e}_y$ est astreint à se mouvoir dans le plan xOz de R, de façon à ce que les côtés EH et EF restent parallèles aux axes Ox et Oz respectivement. Le centre du cadre C de coordonnées (x, 0, z_0) est animé, en régime établi, d'un mouvement rectiligne uniforme suivant la droite $z = z_0$ et de vitesse $\vec{v}=v\vec{e}_x$ où v peut prendre des valeurs positives ou négatives (cf. figure ci-contre).



1) Exprimer la loi d'évolution de l'abscisse x du centre C du cadre en fonction du temps sachant qu'à l'instant t = 0 où l'on peut considérer que le régime de fonctionnement est établi, C se trouve sur l'axe Oz.

2) Le cadre est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ dont la valeur au point de coordonnées (x, 0, z_0) où se trouve le centre C de l'induit à cet instant, s'écrit : $\vec{B}(x,t)=B_0\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\omega_0 t)\vec{e}_y$ où λ est une longueur caractéristique constante et ω_0 est une pulsation constante. Les variables x et t étant liées, montrer que le flux du champ magnétique à travers le cadre peut s'écrire sous la forme de la fonction exclusive du temps t : $\Phi=\Phi_0\cos[(\omega-\omega_0)t]$ où ω et Φ_0 sont des constantes que l'on explicitera. On suppose $a \ll \lambda$ de sorte que l'on peut considérer, *pour ce calcul seulement,* que le champ magnétique est uniforme sur toute la surface de l'induit.

3) Calculer la force électromotrice $e(t)$ induite dans le cadre en fonction de ω , Φ_0 et ω_0 .

4) Le cadre présente une résistance R et un coefficient d'inductance propre L. Montrer que le courant instantané $i(t)$ qui circule dans l'induit dans le sens indiqué sur le schéma de la figure ci-dessus s'écrit, *en régime établi :* $i(t)=I_0\sin[(\omega-\omega_0)t+\psi_0]$. Exprimer I_0 et $\tan(\psi_0)$ en fonction de R, L, ω et ω_0. On supposera $\omega > \omega_0$.

5) Pour calculer la résultante des forces qui s'exercent sur l'induit, on considère à nouveau le champ magnétique comme une fonction des variables liées x et t. Montrer que la force résultante instantanée qui s'exerce sur l'induit peut alors s'écrire sous la forme de la fonction exclusive du temps : $\vec{F}(t)=F_0\sin[(\omega-\omega_0)t]\sin[(\omega-\omega_0)t+\psi_0]\vec{e}_x$. Exprimer F_0 en fonction de I_0, Φ_0 et λ.

6) Montrer que la valeur moyenne temporelle <F> de F(t) calculée sur une période peut s'écrire : $\langle F(t)\rangle=F_1\cos(\psi_0)$. Donner l'expression de F_1 en fonction de I_0, Φ_0 et λ.

Solution

1) Le mouvement du point C est rectiligne uniforme de vitesse constante: $\vec{v}=v\vec{e}_x=\frac{dx}{dt}\vec{e}_x$. A $t = 0$, $x = 0$, on en déduit : $\boxed{x=vt}$.

2) En considérant le flux constant sur toute la surface : $\Phi=\vec{B}(x,t).N\vec{S}=B_0\cos(2\pi\frac{x}{\lambda}-\omega_0 t)\vec{e}_y.N a^2\vec{e}_y$ d'où $\boxed{\Phi=NB_0a^2\cos(2\pi\frac{vt}{\lambda}-\omega_0 t)=\Phi_0\cos[(\omega-\omega_0)t]}$. Par identification : $\boxed{\Phi_0=NB_0a^2}$ et $\boxed{\omega=2\pi\frac{v}{\lambda}}$.

3) $\boxed{e(t)=\frac{-d\Phi}{dt}=\Phi_0(\omega-\omega_0)\sin[(\omega-\omega_0)t]}$.

4) A $e(t)$ on associe l'amplitude complexe : $\underline{E}=\Phi_0(\omega-\omega_0)$. A l'intensité on associe : $\underline{I}=I_0e^{j\psi_0}$.

En appliquant la loi des mailles au circuit on obtient: $e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}$. En notation complexe, cette équation devient : $\Phi_0(\omega-\omega_0)=[R+jL(\omega-\omega_0)]\underline{I}$ d'où $\boxed{\underline{I}=\frac{\Phi_0(\omega-\omega_0)}{[R+jL(\omega-\omega_0)]}}$. D'où $\boxed{I_0=|\underline{I}|=\frac{\Phi_0(\omega-\omega_0)}{\sqrt{R^2+L^2(\omega-\omega_0)^2}}}$.

$\boxed{\psi_0=arg(\underline{I})=arg(\Phi_0(\omega-\omega_0))-arg(R+jL(\omega-\omega_0))=arg(R-jL(\omega-\omega_0))}$ d'où $\boxed{\tan\psi_0=-L\frac{(\omega-\omega_0)}{R}}$.

5) Sur EH et GF le champ n'est pas uniforme mais les forces de Laplace s'exerçant sur 2 éléments de longueur face à face s'annulent 2 à 2. Sur EF et GH le champ est uniforme.

$\vec{F}_L(EF)=i\,\vec{EF}\wedge\vec{B}(x-\frac{a}{2})=-i(t)\,a\,B(x-\frac{a}{2},t)\vec{e}_x$ et $\vec{F}_L(GH)=i\,\vec{GH}\wedge\vec{B}(x+\frac{a}{2})=+i(t)\,a\,B(x+\frac{a}{2},t)\vec{e}_x$ d'où en considérant les N spires: $\vec{F}_L=N\,i(t)\,a[B(x+\frac{a}{2},t)-B(x-\frac{a}{2},t)]\vec{e}_x$.

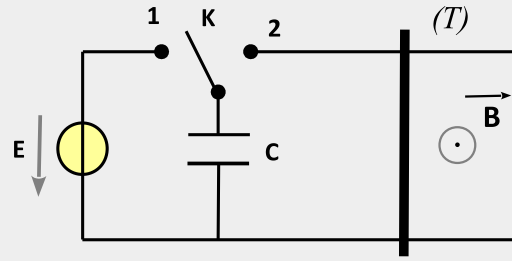
En remplaçant on obtient : $\vec{F}_L=N\,I_0\sin[(\omega-\omega_0)t+\psi_0]\,a\,B_0[\cos(2\frac{\pi}{\lambda}(x+\frac{a}{2})-\omega_0 t)-\cos(2\frac{\pi}{\lambda}(x-\frac{a}{2})-\omega_0 t)]\vec{e}_x$ d'où $\vec{F}_L=-2\,N\,I_0\,a\,B_0\sin[(\omega-\omega_0)t+\psi_0]\sin[(\omega-\omega_0)t]\sin(\frac{\pi}{\lambda}a)\vec{e}_x$ de plus $\frac{a}{\lambda}\ll 1$. On fait un DL au 1er ordre du sin, on obtient : $\vec{F}_L=-2\,N\,I_0\,a^2\,B_0\frac{\pi}{\lambda}\sin[(\omega-\omega_0)t+\psi_0]\sin[(\omega-\omega_0)t]\vec{e}_x$ d'où :

$\boxed{\vec{F}_L=-\Phi_0 I_0\frac{2\pi}{\lambda}\sin[(\omega-\omega_0)t+\psi_0]\sin[(\omega-\omega_0)t]\vec{e}_x}$. Par identification : $\boxed{F_0=-\Phi_0 I_0\frac{2\pi}{\lambda}}$.

6) $\langle F(t)\rangle=-I_0\Phi_0\frac{\pi}{\lambda}\cos(\psi_0)$. Par identification : $\boxed{F_1=-\Phi_0 I_0\frac{\pi}{\lambda}}$.

4. Rampe de lancement ☺☺

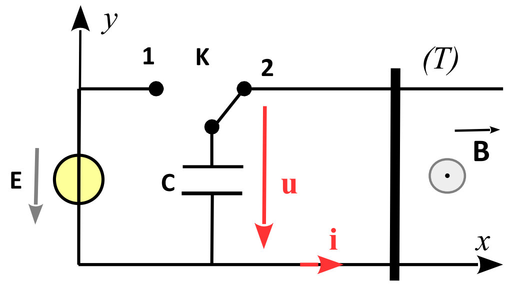
On considère le dispositif ci-contre. Aux instants t < 0, l'interrupteur K est en position (1) , il bascule en position (2) à t=0. Une tige *(T)* de résistance R peut se déplacer sans frottement sur les rails espacés d'une longueur *a*, plongée dans un champ $\vec{B}$ uniforme. On néglige l'auto-induction du circuit.



1) Déterminer la vitesse maximale de la tige.

2) Définir et déterminer le rendement de cette rampe de lancement.

Solution : *(On suppose la résistance des rails nulle)*

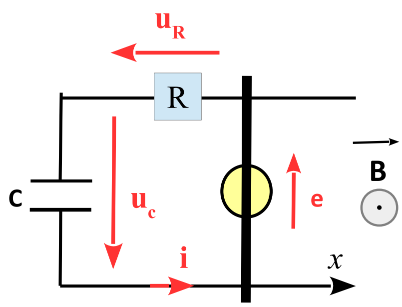


1) A t < 0 , le condensateur se charge. A $t=0^-$ u = E.

t > 0, la décharge du condensateur engendre un courant induit , qui engendre la déplacement de la barre et donc la variation du flux de B à travers le circuit et donc une fem induite.

On exprime dans un premier temps la fem induite $e=\frac{-d\phi}{dt}=-B\,a\,v$

Le circuit équivalent est représenté ci-contre.



Equation électrique :

D'après la loi des mailles : $e+u_R+u_c=0$ d'où $-B\,a\,v-R\,i+u_c=0$ (1)

Pour remplacer u_c il faut dériver : $-B\,a\frac{dv}{dt}-R\frac{di}{dt}+\frac{du_c}{dt}=0$ d'où en remplaçant la dérivée de u_c et en multipliant par (-1) : $B\,a\frac{dv}{dt}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}dt=0$ (EE)

Equation Mécanique :

On fait le bilan des forces suivant la direction *x. D*ans cette direction, la tige n'est soumise qu'à la force de Laplace : $\vec{F}_L=i\,a\,\vec{u}_y\wedge B\,\vec{u}_z=i\,a\,B\,\vec{u}_x$. D'après la 2ème loi de Newton, on en déduit : $m\frac{dv}{dt}=i\,a\,B$ (EM)

On en déduit que : $i=\frac{m}{a\,B}\frac{dv}{dt}$ (2). On remplace l'expression de i dans (EE) pour obtenir l'équation du mouvement.

$+B\,a\frac{dv}{dt}+R\frac{m}{a\,B}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{m}{a\,B\,C}\frac{dv}{dt}dt=0$ D'où $\frac{d^2v}{dt^2}+(\frac{B^2a^2}{m\,R}+\frac{1}{R\,C})\frac{dv}{dt}=0$. En inégrant on obtient :

$\frac{d\,v}{dt}+(\frac{B^2a^2}{m\,R}+\frac{1}{R\,C})v=cste$. Pour déterminer la constante, on considère les conditions initiales : $v(0)=0$.

D'après l'équation (1) on déduit que $i(0)=\frac{E}{R}$ en utilisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur.

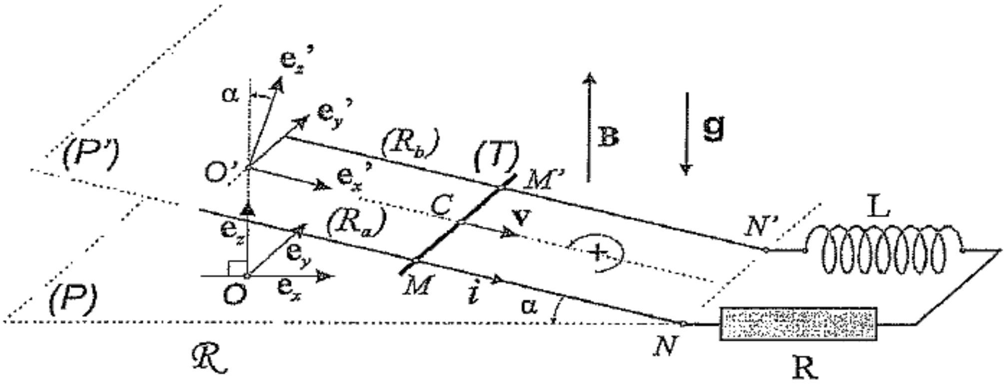
D'après (2) : $(\frac{dv}{dt})_0=\frac{a\,B\,E}{R\,m}$ donc $cste=\frac{a\,B\,E}{R\,m}$ d'où : $\boxed{\frac{d\,v}{dt}+(\frac{B^2a^2}{m\,R}+\frac{1}{R\,C})v=\frac{a\,B\,E}{R\,m}}$. La vitesse limite cad max est atteinte quand $\frac{dv}{dt}=0$ on en déduit : $\boxed{(\frac{B^2a^2}{m}+\frac{1}{C})v_{max}=\frac{a\,B\,E}{m}}$ d'où : $\boxed{v_{max}=\frac{a\,B\,E\,C}{a^2B^2C+m}}$

2) Par définition le rendement : $r=\frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie couteuse}}$. L'énergie couteuse est l'énergie initialement emmagasinnée dans le condensateur : $Energie\ couteuse=\frac{1}{2}C\,E^2$. l'énergie utile est l'énergie cinétique acquise par la barre :

$Energie\ utile=\frac{1}{2}m\,v_{max}^2=\frac{1}{2}m\frac{(a\,B\,E\,C)^2}{(a^2B^2C+m)^2}$ d'où $\boxed{r=\frac{m\,a^2B^2C}{(a^2B^2C+m)^2}}$

Rail sur un plan incliné : ICNA 2009

22. Deux rails conducteurs parallèles ($\mathcal{R}_a$) et ($\mathcal{R}_b$) de longueurs l, distants de a, sont contenus dans un plan ($\mathcal{P}' = O', \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y$) incliné d'un angle α par rapport à un plan horizontal ($\mathcal{P} = O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen et muni d'un repère cartésien ($O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) (voir figure ci-après). Les rails sont plongés dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ et reliés en N et N' à un circuit série RL. Un barreau mobile ($\mathcal{T}$), homogène de masse m, conducteur, en translation rectiligne dans ($\mathcal{P}'$) selon la direction $\mathbf{e}'_x$ parallèle aux rails, glisse sans frotter en maintenant le contact électrique en M et en M'. Le circuit, ainsi fermé, est placé dans le champ de pesanteur terrestre $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.



On note $\mathbf{v} = v(t)\mathbf{e}'_x$ la vitesse du centre d'inertie C de ($\mathcal{T}$), qui coïncide en permanence avec le milieu de MM'. Déterminer la force électromotrice induite e en adoptant comme orientation du circuit, le sens positif (+) indiqué sur la figure précédente.

A) $e = B_0 a v(t)\cos\alpha$ B) $e = -B_0 a v(t)\cos\alpha$ C) $e = 2B_0 a v(t)\sin\alpha$ D) $e = -\frac{1}{2}B_0 a v(t)\sin\alpha$

23. En désignant par $i(t)$ l'intensité du courant algébrique qui circule dans le circuit, déterminer la composante $F_{L,x'} = \mathbf{F}_L . \mathbf{e}'_x$ dans le plan ($\mathcal{P}'$) de la force de Laplace $\mathbf{F}_L$ subie par ($\mathcal{T}$) :

A) $F_{L,x'} = i(t)aB_0\sin\alpha$
B) $F_{L,x'} = 2i(t)aB_0\sin\alpha$
C) $F_{L,x'} = -i(t)aB_0\cos\alpha$
D) $F_{L,x'} = -\frac{1}{2}i(t)aB_0\cos\alpha$

24. Le théorème de la résultante cinétique (encore appelé théorème du centre de masse) permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = h_1 + i(t)h_2$$

où h_1 et h_2 sont des coefficients qui s'expriment en fonction de g, α, a et B_0. Que vaut le rapport h_1/h_2 ?

A) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{mg\cos\alpha}{aB_0}$ B) $\frac{h_1}{h_2} = -\frac{mg}{aB_0\sin\alpha}$ C) $\frac{h_1}{h_2} = -\frac{mg\tan\alpha}{aB_0}$ D) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{mg}{aB_0\tan\alpha}$

25. L'intensité $i(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau_e}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_0 \quad \text{où} \quad \tau_e = \frac{L}{R}$$

ω_0 et i_0 étant des coefficients indépendants du temps. Déterminer ω_0 :

A) $\omega_0 = \frac{aB_0\cos\alpha}{(Lm)^{1/2}}$ B) $\omega_0 = \frac{aB_0\sin\alpha}{(Lm)^{1/2}}$ C) $\omega_0 = \frac{a^2B_0^2\sin^2\alpha}{Lm}$ D) $\omega_0 = \frac{2RB_0\cos\alpha}{m}$

26. Que vaut i_0 ?

A) $i_0 = \frac{mg\tan\alpha}{B_0 a}$ B) $i_0 = \frac{mg}{B_0 a\tan\alpha}$ C) $i_0 = \frac{2mg\tan\alpha}{B_0 a}$ D) $i_0 = \frac{mg\sin\alpha}{B_0 a}$

27. À l'instant initial, $i(0) = 0$ et $(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)(0) = 0$. Lorsque $R = 0$ (et $L \neq 0$), le barreau oscille à la pulsation ω_0 et sa vitesse s'exprime selon : $v(t) = v_0\sin(\omega_0 t) + \text{Cte}$. Déterminer v_0 :

A) $v_0 = \frac{2g(mL)^{1/2}\sin\alpha}{B_0 a}$ B) $v_0 = \frac{g(mL)^{1/2}\tan\alpha}{B_0 a}$ C) $v_0 = \frac{g(mL)^{1/2}\tan\alpha}{4B_0 a}$ D) $v_0 = \frac{g(mL)^{1/2}}{2B_0 a\cos\alpha}$

28. En adoptant les mêmes conditions initiales que dans la question précédente, et si $L = 0$ (et $R \neq 0$), le courant se met sous la forme suivante : $i(t) = i_0[1 - \exp(-t/\tau)]$. Déterminer τ :

A) $\tau = 2\tau_e$ B) $\tau = \frac{mR}{a^2B_0^2}$ C) $\tau = \frac{mR}{a^2B_0^2\tan^2\alpha}$ D) $\tau = \frac{mR}{a^2B_0^2\cos^2\alpha}$

Solution

ICNA 2009 Solution.

22) $\vec{B} \overset{\alpha}{\angle} \vec{S}$ $\quad \Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B \times S \cos\alpha \quad e = -\frac{d\Phi}{dt} = +B_0 \cos\alpha \, a v$ Réponse B

$S = a(cte - x)$!

23) $\vec{F_L} = i\,\overrightarrow{\Pi'\Pi} \wedge \vec{B} = i(-a\vec{e}'_y) \wedge B\vec{e}_z = -iaB\,\vec{e}_x$

$F_{Lx'} = \vec{F_L}\cdot\vec{e}'_x = -iaB\,\vec{e}_x \cdot \vec{e}'_x \Rightarrow F_{Lx'} = -iaB\cos\alpha$ Réponse C

24) On applique la 2ème loi de Newton à la barre suivant $\vec{e}'_x$

$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - iaB_0\cos\alpha \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{iaB_0\cos\alpha}{m}$ (1)

Par identification $\frac{h_1}{h_2} = -\frac{mg\tan\alpha}{aB_0}$. Réponse C

25) Le circuit équivalent est :

$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt}$

$\Rightarrow +B_0\cos\alpha\, a v = Ri + L\frac{di}{dt} \Rightarrow +B_0\cos\alpha\, a\frac{dv}{dt} = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}$

en remplaçant $\frac{dv}{dt}$ tirée de (1) $\Rightarrow +B_0\cos\alpha\, a\left[g\sin\alpha - \frac{iaB_0\cos\alpha}{m}\right] = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}$

$\Rightarrow +B_0\cos\alpha\sin\alpha\, ag - \frac{B_0^2a^2\cos^2\alpha}{m}i = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2}$ d'où :

$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{B_0^2a^2\cos^2\alpha}{mL}i = +\frac{B_0ag\cos\alpha\sin\alpha}{L}$.

Par identification : $\omega_0^2 = \frac{B_0^2a^2\cos^2\alpha}{mL}$ et Réponse A

26) et $\omega_0^2 i_0 = \frac{B_0^2a^2\cos^2\alpha}{m\cancel{L}} i_0 = \frac{\cancel{B_0}\,\cancel{a}g\cos\alpha\sin\alpha}{\cancel{L}} \Rightarrow i_0 = \frac{g\sin\alpha\, m}{a B_0 a\cos\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{i_0 = \frac{mg}{Ba}\tan\alpha}$. Réponse A

27) Si $R=0$ l'équation s'écrit : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 i_0$.

La solution est du type : $i = i_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, en tenant compte des CI $A=-i_0$ et $B=0$ => $i = i_0(1-\cos\omega_0 t)$, on tire de cette équation

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{aB_0\cos\alpha}{m} i_0 (1-\cos\omega_0 t)$$ par intégration

$$v(t) = g\sin\alpha\, t - \frac{aB_0\cos\alpha\, i_0}{m} t + \frac{aB_0\cos\alpha\, i_0}{m\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Par identification : $v_0 = \frac{aB_0\cos\alpha\, i_0}{m\omega_0} = \frac{\cancel{aB_0\cos\alpha}}{\cancel{m}} \times \frac{\cancel{m}g}{\cancel{B_0 a}}\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} \times \frac{(mL)^{1/2}}{B_0 a\cos\alpha}$

=> $\boxed{v_0 = g\frac{\tan\alpha}{aB_0}\sqrt{mL} \quad \text{Réponse B}}$

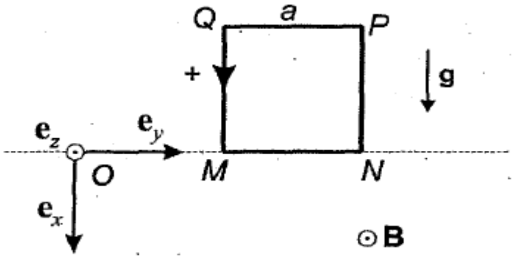
28) Si $L=0$ l'équation électrique s'écrit : $e(t) = Ri = B_0\cos\alpha\, a v$

l'équation de la question 24 devient : $\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - \frac{i a B_0\cos\alpha}{m} = \left(\frac{B_0\cos\alpha}{R}\right)^{-1}\frac{di}{dt}$

=> => $\frac{di}{dt} + \frac{a^2B_0^2\cos^2\alpha}{mR} i = \frac{g\sin\alpha}{R} \times aB_0\cos\alpha$.

=> $\boxed{\tau = \frac{mR}{a^2B_0^2\cos^2\alpha} \quad \text{Réponse D}}$.

29. Un cadre $MNPQ$ sur lequel est enroulé un circuit fermé constitué de $n = 100$ spires conductrices carrées de côtés $a = 10\,\mathrm{cm}$, est placé verticalement de telle sorte qu'à l'instant initial, l'abscisse x de M soit nulle (Fig. ci-après). Le circuit a une résistance totale $R = 10\,\Omega$ et un coefficient d'autoinduction $L = 10\,\mathrm{mH}$. On applique dans le demi-espace $x > 0$, un champ magnétique uniforme et stationnaire $\mathbf{B} = B_0\,\mathbf{e}_z$ où $B_0 = 0{,}5\,\mathrm{T}$. Le cadre, initialement abandonné sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur $\mathbf{g} = g_0\mathbf{e}_x$ où $g_0 = 10\,\mathrm{m\,.s^{-2}}$, pénètre dans la région où le champ magnétique est appliqué. On néglige l'influence des frottements de l'air sur le mouvement du cadre et on adopte comme convention d'orientation algébrique du circuit, le sens direct. On se limite à l'étude du mouvement du cadre correspondant à l'immersion partielle de ce dernier dans le champ magnétique. La masse totale du système est $m = 200\,\mathrm{g}$.



Exprimer la force électromotrice induite e dans le circuit :

A) $e = n^2 B_0 a\dot{x}$ B) $e = 0$ C) $e = -nB_0 a\dot{x}$ D) $e = nB_0\dfrac{x^2\dot{x}}{}$

30. Exprimer la résultante des forces de Laplace $\mathbf{F}_L$, en fonction de l'intensité du courant induit i :

A) $\mathbf{F}_L = nB_0 ai\,\mathbf{e}_x$ B) $\mathbf{F}_L = -n^2 B_0 ai\,\mathbf{e}_x$ C) $\mathbf{F}_L = -B_0 ai\,\mathbf{e}_x$ D) $\mathbf{F}_L = \mathbf{0}$

31. En désignant par $v_x = \dot{x}$ la vitesse de translation du cadre, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 v_x = \frac{g}{\tau}$$

Calculer τ :

A) $\tau = 1\,\mathrm{ms}$ B) $\tau = 1\,\mathrm{s}$ C) $\tau = 2\,\mathrm{s}$ D) $\tau = 16\,\mathrm{min}\;40\,\mathrm{s}$

32. Exprimer ω_0 :

A) $\omega_0 = \dfrac{nB_0 a}{(mL)^{1/2}}$ B) $\omega_0 = \dfrac{nB_0 x^2}{a(mL)^{1/2}}$ C) $\omega_0 = \dfrac{n^2 B_0 a}{(mL)^{1/2}}$ D) $\omega_0 = \dfrac{B_0 a}{(mL)^{1/2}}$

33. On néglige l'autoinduction dans le circuit. L'équation du mouvement devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau'}v_x = g$$

Exprimer τ' :

A) $\tau' = \dfrac{mR}{n^2 B_0^2 a^2}$ B) $\tau' = \dfrac{L}{R}$ C) $\tau' = (mL)^{1/2} nB_0 a$ D) $\tau' = \dfrac{mR}{B_0^2 a^2}$

34. Calculer la vitesse limite v_l vers laquelle le cadre tend dans cette phase de mouvement :

A) $v_l = 8\,\mathrm{mm.s^{-1}}$ B) $v_l = 80\,\mathrm{mm.s^{-1}}$ C) $v_l = 0{,}8\,\mathrm{m.s^{-1}}$ D) $v_l = 8\,\mathrm{m.s^{-1}}$

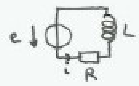
Solution

29 c) $\boxed{e = \int_M^N n(\dot{x}\vec{e}_x \wedge B_0\vec{e}_z)\cdot dy\,\vec{e}_y = -n\dot{x}B_0 a}$

30 A) $\boxed{\vec{F}_L = \vec{0} + \int_M^N n\, i\, dy\,\vec{e}_y \wedge B_0\vec{e}_z = n\, i\, B_0\, a\,\vec{e}_x}$

31 A) $m\dot{v}_x = m g_0 + n\, i\, B_0\, a$

Or l'équation électrique s'écrit : $e = Ri + L\dfrac{di}{dt}$



D'où en remplaçant e et i :

$$-n v_x B_0 a = R\,\frac{m\dot{v}_x - m g_0}{n B_0 a} + L\,\frac{m}{n B_0 a}\,\ddot{v}_x$$

$$\ddot{v}_x + \frac{R}{L}\dot{v}_x + \frac{n^2 B_0^2 a^2}{m L} v_x = \frac{R}{L} g_0$$

En identifiant $\tau = \dfrac{L}{R}$ A.N. : $\underline{\tau} = \dfrac{10.10^{-3}}{10} = \underline{1\ \text{ms}}$

32 A) $\boxed{\omega_0 = \dfrac{n B_0 a}{\sqrt{m L}}}$

33 A) Si on néglige l'autoinduction ($L = 0$) on obtient :

$$m\dot{v}_x = m g_0 + n B_0 a\,\frac{-n v_x B_0 a}{R}$$

$$\dot{v}_x + \frac{n^2 B_0^2 a}{m R} v_x = g_0$$

En identifiant ; $\boxed{\tau' = \dfrac{m R}{n^2 B_0^2 a}}$

34 $v_\ell = \dfrac{m R g_0}{n^2 B_0^2 a}$ A.N. : $\underline{v_\ell} = \dfrac{0{,}2 \times 10 \times 10}{10^4 \times 0{,}5^2 \times 10^{-1}} = \underline{80\ \text{mm.s}^{-1}}$

ORAL CCP MP 2015

Un carré PQRS, de côté a, est parcouru par un courant i. Il glisse sans frottement, à une vitesse v, le long d'une barre métallique, horizontale, parallèle à l'axe (Ox). Il passe de la zone 1 ($x < 0$) à la zone 2 ($x > 0$).

La vitesse initiale du cadre est $\vec{v}=v_0\vec{e}_x$. Il y a un champ magnétique $\vec{B}$ tel que :

- Dans la zone 1 : $\vec{B}=\vec{0}$;
- Dans la zone 2 : $\vec{B}=B\vec{e}_y$;

1) Quel est le sens du courant i ?

2) Calculer la *fem* induite. Trouver une relation entre v et i.

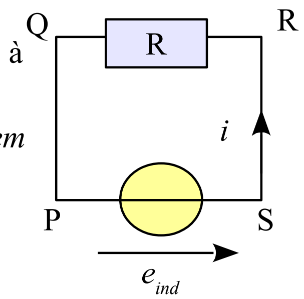
3) Le signe de i est-il cohérent avec le sens donné à la première question ?

4) Exprimer toutes les forces qui s'exercent sur le cadre et établir l'équation différentielle du mouvement.

5) La résoudre pour exprimer v. Conclure.

Solution

1) Pour $x< 0$, il n'y a pas de courant induit. Quand le cadre pénètre dans la zone où règne le champ B Le flux augmente à travers le circuit , il y a apparition d'une courant induit générant un champ induit $\overrightarrow{B_{ind}}$ de sens opposé à $\vec{B}$, l'intensité est dans le sens R→Q→P→S.



2) On oriente la surface dans ce sens . La surface du circuit traversée par le champ B à l'instant t est :

S = a (x). $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont de sens opposé .On a ainsi $\Phi=-B\times a(x)$. On en déduit la *fem* induite : $e_{ind}=\frac{-d\Phi}{dt}=\frac{d(B\times a x)}{dt}=B a\frac{d x}{dt}=B a v$.

Si on suppose le cadre résistif : $e_{ind}=B a v=Ri$

3) Le signe est cohérent !

4) Bilan des forces s'exerçant sur la barre :

La force de Laplace : $\vec{F}_L=i\overrightarrow{SR}\wedge\vec{B}=-i a B\vec{e}_x$, le poids : $\vec{P}=-m g\vec{e}_z$ et la réaction $\vec{R}=R\vec{e}_z$

2ème loi de Newton :

$\vec{F}_L+\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$ en projetant sur l'axe vertical, on obtient : $R=mg$

En projettant sur l'axe horizontale, on obtient : $-i a B=m\ddot{x}$ (EM)

Or $i=\frac{B a v}{R}$ d'où : $\boxed{\dot{v}+\frac{B^2a^2}{Rm}v=0}$ Cette relation est valable uniquement pour $x < a$.

5) L'équation obtenue est du type : $\boxed{\dot{v}+\frac{v}{\tau}=0}$ avec $\boxed{\tau=\frac{Rm}{B^2a^2}}$. La vitesse est en tenant compte des CI :

$\boxed{v(t)=v_0\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)}$. La présence du champ $\vec{B}$ freine le cadre quand il pénètre dans la zone x=0.

ICNA 2019

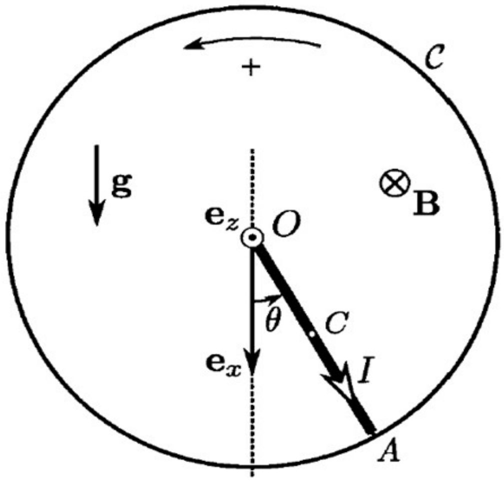
On étudie dans le référentiel du laboratoire de repère d'espace $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ où $\vec{e}_x$ désigne la verticale descendante, un pendule constitué d'une tige conductrice homogène OA, de longueur l = OA = 15 cm et de masse m = 10g, fixée en O à une liaison pivot supposée parfaite, d'axe $\vec{e}_z$.

On repère la position de la tige par l'angle θ, orienté dans le sens direct qu'elle forme avec la verticale descendante.

La tige est parcourue par une intensité I réglagle dont la source n'est pas représentée. La continuité du circuit est assurée par un cerceau conducteur C, de centre O, fixe dans R et orthogonal à $(O\vec{e}_z)$.

Le cerceau est en contact avec la tige grâce à un balai situé à son extrémité A. Le balai glisse sans frottement sur le cerceau.

Ce pendule est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}=-B_0\vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$. On note C le milieu du segment AO. Le moment d'inertie de la tige vaut $J=\frac{ml^2}{3}$.



On suppose l'intensité de la pesanteur uniforme de valeur g = 10m.s^{-2}.

1) Lorsque I = 0, établir, en fonction des données, l'expression de la période T_0 des petites oscillations de la barre . Faire l'application numérique.

2) Désormais, I ≠ 0. Exprimer le moment M_L de la force de Laplace par rapport à l'axe Oz s'exerçant sur la tige

3) L'équation du mouvement se met sous la forme : $\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=k\,\omega_0^2$ où ω_0 et k sont deux constantes temporelles. Déterminer ces deux constantes.

4) La tige ne possède de positions d'équilibre que si $B_0 < B_M$. Déterminer B_M.

5) On note n_e, le nombre de positions d'équilibre de la tige lorsque $B_0 < B_M$ et n_s le nombre de positions d'équilibre stables. Déterminer n_e et n_s.

6) Déterminer le fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.