

3. Couplage d'oscillateurs par mutuelle inductance ☺☺

1) Pour la maille de gauche $E = \frac{-q_1}{C} + u_1$ avec $u_1 = L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$, $i_1 = \frac{-dq_1}{dt}$ et $i_2 = \frac{-dq_2}{dt}$ (le signe - provient du fait que le courant rencontre l'armature portant la charge -q) d'où

$$E = \frac{-q_1}{C} + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = \frac{-q_1}{C} - L \frac{d^2 q_1}{dt^2} - M \frac{d^2 q_2}{dt^2} \text{ d'où } \boxed{\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_1}{LC} + \frac{E}{L} = 0} \text{ Par}$$

identification : $\boxed{\alpha = \frac{M}{L}}$ et $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$.

Pour la maille de droite $u_2 = \frac{q_2}{C} = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ d'où en remplaçant les intensités : $\frac{q_2}{C} = -L \frac{d^2 q_2}{dt^2} - M \frac{d^2 q_1}{dt^2}$ d'où

$$\boxed{\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_2}{LC} = 0} \text{ On trouve pour } \alpha \text{ et } \omega_0 \text{ les mêmes expressions que pour l'équation précédente ce}$$

qui est normal.

2) Pour passer à la notation complexe, on remplace chaque dérivée temporelle par une multiplication par $j\omega$, on obtient ainsi les deux équations :

$$\boxed{-\omega^2(\underline{q}_1 + \alpha \underline{q}_2) + \omega_0^2 \underline{q}_1 + \frac{E}{L} = 0} \quad (1) \text{ et } \boxed{-\omega^2(\underline{q}_2 + \alpha \underline{q}_1) + \omega_0^2 \underline{q}_2 = 0} \quad (2).$$

3) Grâce à l'équation 2, on obtient : $\underline{q}_1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} \underline{q}_2$ d'où $-\omega^2 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} \underline{q}_2 + \alpha \underline{q}_2 \right) + \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} \underline{q}_2 + \frac{E}{L} = 0$ d'où

$$-\omega^2 \underline{q}_2 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} + \alpha \right) + \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} \underline{q}_2 + \frac{E}{L} = 0 \text{ d'où } \left[-\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 - \alpha^2 \omega^4 + \omega_0^4 - \omega_0^2 \omega^2 \right] \underline{q}_2 + \frac{E \alpha \omega^2}{L} = 0$$

d'où $\boxed{\underline{q}_2 = \frac{-E \alpha \omega^2}{L [-2 \omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 (1 - \alpha^2) + \omega_0^4]}}$.

4) $\boxed{|\underline{q}_2| = \frac{E_0 \alpha \omega^2}{L [-2 \omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 (1 - \alpha^2) + \omega_0^4]}}$ $\lim_{t \rightarrow \infty} |\underline{q}_2| = \lim_{t \rightarrow 0} |\underline{q}_2| = 0$.

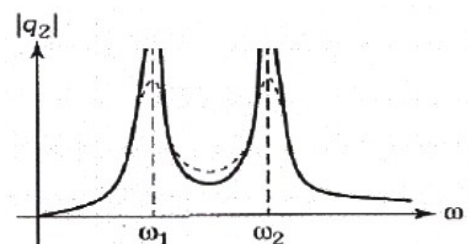
$|\underline{q}_2| = +\infty$ quand le dénominateur est nul c'est à dire quand $+X^2(1 - \alpha^2) - 2\omega_0^2 X + \omega_0^4 = 0$ où $X = \omega^2$ (pour la valeur 0, on peut retirer les valeurs absolues).

Pour déterminer X, on résout l'équation : $\Delta = 4\omega_0^4 - 4\omega_0^4(1 - \alpha^2) = 4\alpha^2 \omega_0^4$ d'où

$$X_1 = \frac{(2\omega_0^2 - 2\alpha\omega_0^2)}{2(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2(1 - \alpha)}{(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2}{(1 + \alpha)} \text{ soit } \boxed{\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \alpha}}} \text{ et}$$

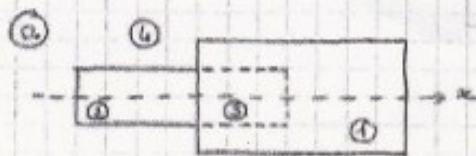
$$X_2 = \frac{(2\omega_0^2 + 2\alpha\omega_0^2)}{2(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2(1 + \alpha)}{(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2}{(1 - \alpha)} \text{ soit } \boxed{\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \alpha}}}$$

d'où le graphe ci-contre:



5) Si on fait l'expérience, il existera des phénomènes dissipatifs qui rendront la résonance finie (courbe en pointillés).

5. Energie magnétique



zone ① : $\vec{B} = \vec{B}_1 = \mu_0 m_1 i_1 \vec{u}_x$

avec m_1 le nombre de spires par unité de longueur pour le

solénoïde (1)

zone ② : $\vec{B} = \vec{B}_2 = \mu_0 m_2 i_2 \vec{u}_x$ avec m_2 le nombre de spires par unité de longueur pour le solénoïde (2)

zone ③ : $\vec{B} = \vec{B}_3 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 (m_1 i_1 + m_2 i_2) \vec{u}_x$

zone ④ :

$\vec{B}_4 = \vec{0}$

Ⓢ Pour le solénoïde (1) :

$$\Phi_{1\text{propre}} = \underbrace{\mu_0 m_1 i_1 S_1}_{\substack{\text{flux à} \\ \text{travers une spire}}} \times \underbrace{m_1 a_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{nombre de spires}}} = L_1 i_1 \quad \text{d'où} \quad L_1 = \mu_0 m_1^2 a_1 S_1$$

Pour le solénoïde (2) :

De même que précédemment $L_2 = \mu_0 m_2^2 a_2 S_2$

$\Phi_{1+2} = \text{flux de } \vec{B}_1 \text{ à travers le solénoïde (2)}$

$$= \underbrace{\mu_0 m_1 i_1 S_2}_{\substack{\text{flux à} \\ \text{travers une} \\ \text{spire de (2)}}} \times \underbrace{a_2 m_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{nombre de spires}}} = M i_1 \quad \text{d'où} \quad M = \mu_0 m_1 m_2 a_2 S_2$$

Remarque : $\Phi_{2+1} = \text{flux de } \vec{B}_2 \text{ à travers le solénoïde (1)}$

$$= \mu_0 m_2 i_2 S_1 \times a_1 m_1 = M i_2$$

On retrouve bien $n = \mu_0 m_1 m_2 a_2 S_2$

Ⓢ $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + n i_1 i_2$

6. Dimensionnement d'un transformateur ☺☺

- En sortie du transformateur : $v_2(t) = m v_1(t)$
- En sortie du redresseur : $v_3 = |v_2| = m |v_1|$
- En sortie du moyeneur : $v_4 = \langle v_3 \rangle = \langle |v_2| \rangle = m \langle |v_1| \rangle$

Calculons la valeur moyenne de v_1 , avec $T = \frac{1}{f_0}$, en notant que $\sin(2\pi f_0 t)$ est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{T}{2}, T\right]$.

$$\begin{aligned}
 \langle |v_1| \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V_{0,1} |\sin(2\pi f_0 t)| dt \\
 &= \frac{V_{0,1}}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f_0 t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -\sin(2\pi f_0 t) dt \right) \\
 &= \frac{V_{0,1}}{T} \left(-\frac{\cos(2\pi f_0 T/2) - 1}{2\pi f_0} + \frac{\cos(2\pi f_0 T) - \cos(2\pi f_0 T/2)}{2\pi f_0} \right) \\
 &= V_{0,1} \frac{1 + 1 + 1 + 1}{2\pi} \\
 &= \frac{2V_{0,1}}{\pi}
 \end{aligned}$$

Ainsi on a : $v_4 = \frac{2mV_{0,1}}{\pi}$, soit $m = \frac{\pi v_4}{2V_{0,1}} = 7,9 \cdot 10^{-2}$

Il faut environ 13 fois plus de spires au primaire qu'au secondaire.