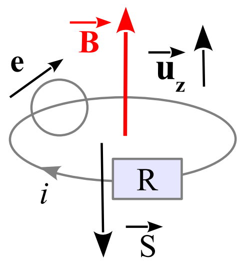
## 1. Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps ☺☺

1) Le champ qui traverse le circuit augmente, le circuit réagit en créant un champ magnétique induit de sens opposé, **Le sens du courant induit est le sens positif choisi de l'énoncé**.

2) On oriente la surface, le vecteur surface $\vec{S}$ est de sens opposée à $\vec{B}(t)$. $\Phi=\vec{B}(t).\vec{S}=-B_0 S\left[1-e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right]$.

D'après la loi de faraday, la fem induite est telle que $e_{ind}=-\frac{d\Phi}{dt}$ d'où $\boxed{e_{ind}=\frac{B_0 S}{\tau}e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}}$. On obtient l'intensité grâce à la loi de Pouillet : $i(t)=\frac{e_{ind}}{R}$ d'où $\boxed{i(t)=\frac{B_0 S}{\tau R}e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}>0}$, on retrouve le sens de la question




3) On a négligé le phénomène d'auto-induction, pour en tenir compte, il faut considérer l'inductance propre L du circuit .

4) $\Phi_{tot}=\Phi_{ext}+\Phi_p$, $e_{tot}=-\frac{d\Phi_{ext}}{dt}-L\frac{di}{dt}=e_{ind}-L\frac{di}{dt}$ en utilisant la convention générateur.

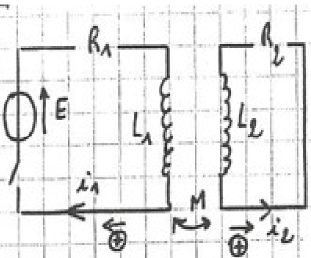
En utilisant la loi des mailles on obtient : $Ri=e_{ind}-L\frac{di}{dt}$ d'où $\boxed{L\frac{di}{dt}+Ri=\frac{B_0 S}{\tau}e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}}$.

## 2. Couplage entre 2 bobines identiques☺☺

1) $\phi_1=L_1 i_1+M i_2$ donne

$e_1=-\frac{d\phi_1}{dt}=-L\frac{di_1}{dt}-M\frac{di_2}{dt}$

avec $e_1$ dans le sens ⊕ choisi




$L_1=L_2=L$, $R_1=R_2=R$

Puis $E-Ri_1+e_1=0$ donne

$E=Ri_1+L\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$ (1)

de même, $Ri_2+L\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}=0$ (2) (en faisant $E=0$)

2) (1+2) donne $E=R(i_1+i_2)+L\left(\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}\right)+M\left(\frac{di_2}{dt}+\frac{di_1}{dt}\right)=0$

donc en posant $S=i_1+i_2$ : $E=RS+(L+M)\dot{S}$ (3)

(1-2) donne, en posant $D=i_1-i_2$, $E=RD+(L-M)\dot{D}$ (4)

(3) donne $S=\frac{E}{R}+\alpha e^{-t/\tau_1}$ avec $1/\tau_1=R/L+M$

(4) donne $D=\frac{E}{R}+\beta e^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_2=(L-M)/R$

Comme $i_1$ et $i_2$ sont continues avec $i_1(0)=i_2(0)=0$, il vient $S=\frac{E}{R}(1-e^{-t/\tau_1})$ et $D=\frac{E}{R}(1-e^{-t/\tau_2})$

3a -
$\left.\begin{array}{l} i_1+i_2=S \\ i_1-i_2=D \end{array}\right\} \Rightarrow i_1=\frac{1}{2}(S+D)=\frac{1}{2}\frac{E}{R}\left(2-e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right)$

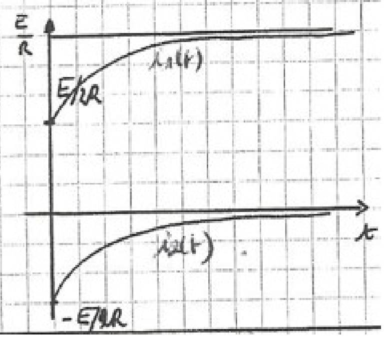
$i_2=\frac{1}{2}(S-D)=\frac{1}{2}\frac{E}{R}\left(e^{-t/\tau_2}-e^{-t/\tau_1}\right)$


3b si $L=M$, $\tau_2=0$, (4) devient $E=RD$, (3) devient $E=RS+2L\dot{S}$

d'où $S=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$ $D=\frac{E}{R}$

d'où $i_1=\frac{E}{2R}\left(2-e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$

$i_2=-\frac{E}{2R}\left(e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$



# 3. Couplage d'oscillateurs par mutuelle inductance ☺☺

**attention ! Pour calculer les pulsations de résonance on ne peut pas dire que la dérivée du dénominateur D est nul car la résonance est infini! C'est pour cette raison qu'on dit qu'à la résonance D=0 .**

**a)** Un phénomène d'induction se produit dans les deux circuits car les flux les traversant varient dans le temps :

$$\Phi_1 = Li_1 + Mi_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = Li_2 + Mi_1.$$

Alors, $u_1 = -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$ et $u_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$.

La loi des mailles donne : $u_1 = E + \frac{q_1}{C}$ et $u_2 = \frac{q_2}{C}$.

Vu les orientations, $i_1 = -\dot{q}_1$ et $i_2 = -\dot{q}_2$.

Ainsi, $\ddot{q}_1 + \frac{M}{L}\ddot{q}_2 + \frac{1}{LC}q_1 + \frac{E}{L} = 0$, soit $\boxed{\ddot{q}_1 + \alpha\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 + \frac{E}{L} = 0}$

$\ddot{q}_2 + \frac{M}{L}\ddot{q}_1 + \frac{1}{LC}q_2 = 0$, soit $\boxed{\ddot{q}_2 + \alpha\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0}$.

**Erreur à éviter**

Le signe moins provient du fait que le courant rencontre l'armature portant la charge $-q$.

En notation complexe, ces équations deviennent :

$$\boxed{-\omega^2(\underline{q}_1 + \alpha\underline{q}_2) + \omega_0^2\underline{q}_1 + \frac{E}{L} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{-\omega^2(\underline{q}_2 + \alpha\underline{q}_1) + \omega_0^2\underline{q}_2 = 0}.$$

**b)** On élimine alors $\underline{q}_1$ par la seconde équation qui fournit $\alpha\omega^2\underline{q}_1 = (\omega_0^2 - \omega^2)\underline{q}_2$, d'où :

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\alpha\omega^2}\underline{q}_2 - \alpha\omega^2\underline{q}_2 + \frac{E}{L} = 0.$$

Finalement, $\boxed{\frac{\underline{q}_2}{E} = -\frac{\frac{\alpha\omega^2}{L}}{\omega_0^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + (1-\alpha^2)\omega^4}}$.

**c)** À basse et haute pulsations, ce rapport tend vers 0. On cherche les annulations éventuelles du dénominateur. On pose $X = \omega^2$, ce qui revient à une équation du second degré en $X$. Le discriminant réduit est :

$$\Delta' = \omega_0^4 - \omega_0^4(1-\alpha^2) = \alpha^2\omega_0^4.$$

On en déduit les pulsations conférant une amplitude infinie à $\underline{q}_2$ :

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 \pm \alpha\omega_0^2}{1-\alpha^2} \quad \text{soit} \quad \omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \alpha}}.$$

Deux pulsations de résonances existent et on obtient l'allure du graphe de la figure 47.

Il est possible de vérifier que pour des circuits non couplés, une seule pulsation de résonance subsiste : la pulsation $\omega_0$ du circuit $LC$.

$|\underline{q}_2|$ reste nulle aux faibles pulsations : le couplage ne se fait pas en régime continu.

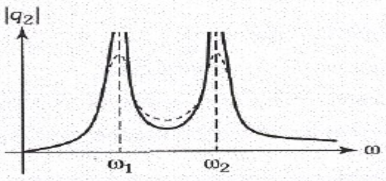



Figure 47

**Remarque**

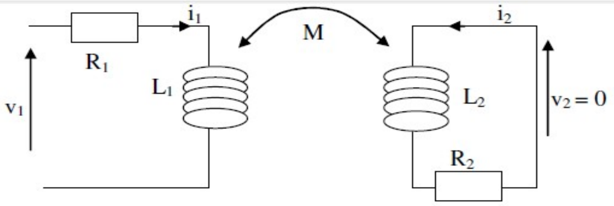
Deux circuits possédant une pulsation de résonance sont couplés : il en résulte un unique système avec deux pulsations de résonance.

**d)** La prise en compte d'éléments dissipatifs (résistances) rend ces résonances finies (pointillés de la figure 47).

# 4. Chauffage par induction ☺☺

**(Rem il manque les barres sous les grandeurs complexes)**

1. Ecrivons les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre les intensités $i_1$ et $i_2$ circulant dans chacun d'eux).



représentation en convention récepteur

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad et$$

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

2. En passant en expressions complexes : $v_1 = R_1 i_1 + jL_1\omega i_1 + jM\omega i_2$ (1)

et

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + jL_2\omega i_2 + jM\omega i_1 \quad (2)$$

De (2) on tire :

$$i_2 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}.i_1$$

donc l'amplitude complexe :

$$A = i_2/i_1 \quad = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

On injecte ce résultat dans (1) , d'où l'impédance complexe d'entrée du bobinage inducteur $Z_e$ = $\underline{V_1}$ / $\underline{I_1}$.

$$Z_{e1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

3. Compte tenu de la fréquence choisie $R_1 << L_1.\omega$ (numériquement $R_1$ = 0,018 Ω et $L_1.\omega$ = 4,7 Ω) et $R_2 << L_2.\omega$ (numériquement $R_2$ = 0,0083 Ω et $L_2.\omega$ = 0,038 Ω) ce qui amène à pouvoir négliger les résistances $R_1$ et $R_2$.
En simplifiant les expressions littérales précédentes en conséquence :

$$A = i_2/i_1 \quad = \frac{-M}{L_2}$$

et : $v_1 = jL_1\omega i_1 + jM\omega.\left(-\frac{M}{L_2}\right).i_1$

Le calcul numérique, sachant que la valeur de mutuelle est estimée à M = 2,0 µH,
donne des modules de $\underline{A}$ = M/$L_2$ = 8,3
et de

$$Z_{e1} = \omega.\sqrt{\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 2{,}1\ \Omega$$


$$Z_{e1} = \omega.\sqrt{\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 2{,}1\ \Omega$$


4. La puissance dissipée dans les parties résistives du circuit inducteur et du circuit induit sera donc :

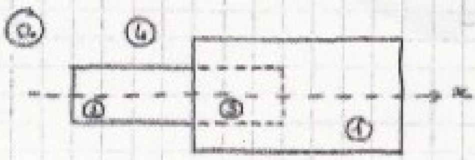
$$P_1 = R_1 {I_1}^2 = \frac{R_1 {V_1}^2}{\omega^2.\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 69{,}4\ W$$

$$P_2 = R_2 {I_2}^2 = \frac{R_2 {V_1}^2 M^2}{\omega^2.(L_1 L_2 - M^2)^2} = 2{,}22\ kW$$

5. On soulève le récipient. Le champ magnétique créé par l'inducteur et vu par la plaque intégrée au récipient diminue. Le flux magnétique à travers cette plaque diminue et donc l'induction mutuelle M diminue. Alors l'impédance d'entrée $Z_e$ augmente pour une même valeur de tension d'alimentation, donc la valeur efficace de l'intensité dans l'inducteur $I_1 = V_1/Z_{e1}$ va décroître. Il en sera de même pour $I_2$ l'intensité dans la plaque chauffante fixée au récipient.

# 5. Energie magnétique ☺☺

a)




Zone ① : $\vec{B} = \boxed{\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1 \vec{u}_x}$ avec $n_1$ le nombre de spires par unité de longueur pour le solénoïde (1)

Zone ② : $\vec{B} = \boxed{\vec{B}_2 = \mu_0 n_2 i_2 \vec{u}_x}$ avec $n_2$ le nombre de spires par unité de longueur pour le solénoïde (2).

Zone ③ : $\vec{B} = \boxed{\vec{B}_3 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \mu_0 (n_1 i_1 + n_2 i_2) \vec{u}_x}$

Zone ④ : $\boxed{\vec{B}_4 = \vec{0}}$

b) Pour le solénoïde (1) :

$$\Phi_{1\,propre} = \underbrace{\mu_0 n_1 i_1 S_1}_{\text{flux à travers une spire}} \times \underbrace{n_1 a_1}_{\text{nombre de spires}} = L_1 i_1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{L_1 = \mu_0 n_1^2 a_1 S_1}$$

Pour le solénoïde (2) :

De même que précédemment $\boxed{L_2 = \mu_0 n_2^2 a_2 S_2}$

$\Phi_{1 \to 2}$ = flux de $\vec{B}_1$ à travers le solénoïde (2)

$$= \underbrace{\mu_0 n_1 i_1 S_2}_{\text{flux à travers une spire de (2)}} \times \underbrace{x\, n_2}_{\text{nombre de spires}} = M i_1 \quad \text{d'où} \quad \boxed{M = \mu_0 n_1 n_2 x S_2}$$

Remarque : $\Phi_{2 \to 1}$ = flux de $\vec{B}_2$ à travers le solénoïde (1)

$$= \mu_0 n_2 i_2 S_2 \times x\, n_1 = M i_2$$

On retrouve bien $\boxed{M = \mu_0 n_1 n_2 x S_2}$

c) $E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

## 6. Dimensionnement d'un transformateur

- En sortie du transformateur : $v_2(t) = mv_1(t)$
- En sortie du redresseur : $v_3 = |v_2| = m|v_1|$
- En sortie du moyenneur : $v_4 = \langle v_3 \rangle = \langle |v_2| \rangle = m\langle |v_1| \rangle$

Calculons la valeur moyenne de $v_1$, avec $T = \frac{1}{f_0}$, en notant que $\sin(2\pi f_0 t)$ est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{T}{2}, T\right]$.

$$\begin{aligned}
\langle |v_1| \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T V_{0,1}|\sin(2\pi f_0 t)|\mathrm{d}t \\
&= \frac{V_{0,1}}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f_0 t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -\sin(2\pi f_0 t)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{V_{0,1}}{T}\left(-\frac{\cos(2\pi f_0 T/2) - 1}{2\pi f_0} + \frac{\cos(2\pi f_0 T) - \cos(2\pi f_0 T/2)}{2\pi f_0}\right) \\
&= V_{0,1}\frac{1+1+1+1}{2\pi} \\
&= \frac{2V_{0,1}}{\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi on a : $\boxed{v_4 = \frac{2mV_{0,1}}{\pi}}$, soit $\boxed{m = \frac{\pi v_4}{2V_{0,1}} = 7,9.10^{-2}}$

Il faut environ 13 fois plus de spires au primaire qu'au secondaire.