# Intégration sur un intervalle quelconque — Correction partielle

1. Justifier l'existence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

   1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\ dx$ 2. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\ dx$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\ dx$ 4. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ (**exemple classique, à bien savoir faire**) 5. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\ dx$ : on utilisera, avec précaution, le changement de variable : $t = \tan x$

   Par DES, $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right)$.
   On note maintenant, pour $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $I_{a,b} = \int_a^b \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}dx$
   Alors $I_{a,b} = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\ln(|1+x|) - \frac{1}{2}\ln(|1+x^2| + \arctan x)\right]_a^b$.
   Par opération sur les limites, $\boxed{\text{l'intégrale converge}}$ et
   $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\ dx = \lim_{a\to 0, b\to+\infty} I_{a,b} = \frac{\pi}{4}.}$

   Notons, pour tout $(a,b) \in ]1,2[$, $I_{a,b} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$.
   On pose maintenant $t = \sqrt{x-1}$. C'est un changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[a,b]$ dans $[\sqrt{a-1}, \sqrt{b-1}]$. Alors $I_{a,b} = \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dx = 2[\arcsin(t)]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}}$.
   Par opération sur les limites, $\boxed{\text{l'intégrale converge}}$ et
   $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\ dx = \lim_{a\to 1, b\to 2} I_{a,b} = \pi.}$

2. **Intégrale de Dirichlet** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$

   Montrer que les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne sont pas **intégrables** sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$ **converge** (*Indication :* IPP)

   **Montrer que la fonction $t \mapsto \sin t$ n'est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.**

   Notons $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(x) = \int\limits_0^x |\sin x| dx$. Il est équivalent de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ ou que le sinus n'est pas intégrable.
   Or, par relation de Chasles, $F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor - 1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x dx + \int_{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi}^{x} |\sin x| dx$.
   Le dernier terme étant l'intégrale sur un segment d'une fonction continue positive, il est positif, donc
   $F(x) \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor - 1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x dx$.
   On remarque de plus que, pour $k$ un entier naturel,

$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}|\sin x|dx = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin x dx = [-\cos(x)]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = 2$ (le sinus étant positif sur tout intervalle de la forme $[2k\pi;(2k+1)\pi]$).
Un raisonnement analogue donne
$\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}|\sin x|dx = \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}(-\sin x)dx = [\cos(x)]_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} = 2.$
*Ceci pouvait aussi s'obtenir par changement de variable.*
Ainsi $F(x) \geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor -1} 2 = 2\times\lfloor\frac{x}{\pi}\rfloor - 1 \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.

**Montrer que la fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ n'est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.**

Dans le raisonnement qui précède, on intègre une modification : pour tout $k$ entier strictement positif $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\frac{\sin x}{x}|dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$.
On n'a pas besoin d'observer l'intégrabilité au voisinage de 0, puisque montrer qu'il n'y a pas intégrabilité au voisinage de $+\infty$ suffit à montrer que la fonction n'est pas intégrable.
On peut alors montrer la non-intégrabilité de $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ sur $[2\pi;+\infty[$.
Or, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt \geq \frac{1}{2k+1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}|\sin t| = \frac{2\pi}{2k+1}$. Le raisonnement précédent montre alors que la non intégrabilité de $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ découle de la divergence de la série harmonique.
*Remarque :* Par continuité en 0, on peut considérer l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$

Montrons la convergence de l'intégrale de $\frac{\sin t}{t}$ sur $]0;+\infty[$.
La fonction $t\mapsto\frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$ (en effet, $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} x$, donc $\frac{\sin t}{t}\underset{x\to 0}{\to} 1$). La convergence de cette intégrale peut donc être étudiée sur $[2\pi,+\infty[$.
Posons $u : t\mapsto -\cos t$ et $v : t\mapsto\frac{1}{t}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2\pi,+\infty[$, avec $uv(x)\underset{x\to+\infty}{\to} 0$. De plus, pour tout $t$ réel, $|\frac{\sin t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ : par comparaison (intégrale de Riemann), la fonction $t\mapsto\frac{-\sin t}{t^2}$ est intégrable, donc son intégrale converge sur $[2\pi,+\infty[$. Alors, par théorème d'IPP, il y a convergence de $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}$ et on a l'égalité suivante :
$\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin t}{t} = [-\frac{\cos t}{t}]_{2\pi}^{\infty} - \int_{2\pi}^{+\infty} -\frac{\cos t}{t^2}dt$. Calculer la valeur de cette intégrale est une autre affaire...

3. Déterminer la nature des intégrales suivantes ($\alpha\in\mathbb{R}$) :
   1. $\int_0^{+\infty}\frac{x+3}{(x^2+x+2)^\alpha}\,dx$ 2. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ 3. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2\ln t}\,dt$ 4. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\ln t}\,dt$ 5. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}\,dt$
   6. $\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ 7. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}\,dx$ 8. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

**Etape 1 :** *On vérifie que la fonction qu'on intègre est définie et continue sur l'intérieur de l'intervalle, et éventuellement en une ou en ses borne(s).*
Pour tout $\alpha$, la fonction $f : x \mapsto \frac{x+3}{(x^2+x+2)^\alpha}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

**Etape 2 :** *On détermine quelle(s) borne(s) pose(nt) problème.*
La fonction $f$ étant continue en 0, la convergence de l'intégrale dépend du comportement de $f$ au voisinage de $+\infty$.

**Etape 3 :** *On observe le comportement de la fonction intégrée en chaque borne problématique - puis on conclut*
Or $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{1-2\alpha}$. Puisque $f$ est de signe constant au voisinage de $+\infty$, et par comparaison avec une intégrale de Riemann, la fonction $f$ n'est intégrable sur $[0;+\infty[$ que si et seulement si $1-2\alpha < -1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 1$.

En vrac -
$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$, et ces fonctions sont positives au voisinage de $0+$ : par **équivalence/ critère d'équivalence/ intégration de relation d'équivalence** de fonctions **à termes positifs**, il y a intégrabilité au voisinage de 0. **Attention !** On pense à vérifier qu'il s'agit bien de fonctions positives, ou on prouve l'intégrabilité en comparant les valeurs absolues des fonctions entre elles, avant de revenir à la convergence de l'intégrale.

$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, et on prouve, par exemple par le changement de variable $t = 1-x$ que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable au voisinage de 1 (car $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au voisinage de 0).

$\frac{1}{x^2 \ln x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}^2}$ pour $x > e$ (fonctions positives ; comparaison à une fonction intégrable).

$\frac{1}{x^2 \ln x} \underset{x\to1}{\sim} \frac{1}{x-1}$ : en effet $\ln x = \ln(1+(x-1)) \underset{x\to1}{\sim} x-1$. Pas d'intégrabilité en 1. De même pour $t \to \frac{1}{t \ln t}$.
Soit $g : x \mapsto \ln(\ln x)$. La fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[e;+\infty[$ (même sur un intervalle plus large, mais on n'a besoin de l'estimer qu'au voisinage de $+\infty$) et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. Puisque, pour $x \geq e, g'(x) = \frac{1}{x \ln x}$, on en déduit que l'intégrale de $g'$ diverge au voisinage de $+\infty$.

Par croissances comparées, $t^{1/2}\ln(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, c'est-à-dire que $\ln(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{-1/2})$. Ainsi $\frac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^{3/2}})$. Par comparaison (...), il y a intégrabilité, donc convergence de l'intégrale, au voisinage de $+\infty$. Il n'y a évidemment aucun problème en 1, où la fonction est continue.

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{t-\sin t}{t^\alpha} \sim t^{1-\alpha}$. Il n'y a donc intégrabilité (les fonctions sont positives) et convergence de l'intégrale que si et seulement si $1-\alpha < -1$, soit $\alpha > 2$. On utilise un DL du sinus en 0 pour trouver qu'au voisinage de $0^+$, la fonction ne change pas de signe, et $\left|\frac{t-\sin t}{t^\alpha}\right| \sim \frac{t^{3-\alpha}}{6}$. Il n'y a convergence que si et seulement si $3-\alpha > -1$, soit si et seulement si $\alpha < 4$. Sur l'intervalle tout entier, l'intégrale de la fonction ne converge que si et seulement si $\alpha \in ]2;4[$.

On observe que $\frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2x}}$ : convergence au voisinage de 0 par comparaison à une fonction intégrable. D'autre part, $\frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{xe^x}}$. Par croissances comparées puis critère du petit O, il y a convergence. (Détail : $\frac{x^2}{\sqrt{xe^x}} \to 0$).

Au voisinage de 0, $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$, donc $\frac{\ln 1+\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ : convergence de l'intégrale au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln x}{2x^2}$, et $\frac{\ln x}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x^{3/2}})$. On conclut qu'il y a bien convergence de l'intégrale.

☞**A retenir :** On pense à indiquer la positivité des fonctions lorsqu'on les compare, ou alors on compare leurs valeurs absolues. On compare à des fonctions dont on connaît l'intégrabilité (ou la non-intégrabilité). On mentionne "par critère du .../ par intégration des relations de .../par comparaison...". Les équivalences et les DL sont des outils précieux.

4. **Intégrales de Bertrand**
Déterminer la nature des intégrales suivantes : $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\, dt$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
On distinguera les cas : $\alpha > 1$, $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

La fonction $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2;+\infty[$. La nature de ces intégrales dépend donc du comportement de $f_{\alpha,\beta}$ en $+\infty$.

**Si $\alpha = 1$** Soit $\beta = 1$ et $\int \frac{1}{t\ln t} = \ln(|\ln t|) + C$ (lire "les primitives de $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ sont de la forme $t \mapsto \ln(|\ln t|) + C$, avec $C$ réel"), qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ;
soit $\beta \neq 1$, et dans ce cas $\int \frac{1}{t(\ln t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta(\ln t)^{\beta-1}}$, qui n'admet une limite que si et seulement si $\beta - 1 > 0$, soit si et seulement si $\beta > 1$.
Ainsi, si $\alpha = 1$, l'intégrale de $f_{\alpha,\beta}$ sur $[2;+\infty[$ converge si et seulement si $\beta > 1$

**Si $\alpha > 1$**

On remarque que, pour tout $t \geq e$, $\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \leq \frac{1}{t^\alpha}$, les deux fonctions fonction de $t$ étant positives et la dernière étant intégrable sur $[2;+\infty[$. On déduit de cette relation de comparaison que $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$.

**Si** $\alpha < 1$ Par croissances comparées, $\frac{t^\alpha(\ln t)^\beta}{t^1} = \frac{(\ln t)^\beta}{t^{1-\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, (car $1-\alpha > 0$) ce dont on déduit que $\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o(f_{\alpha,\beta}(t))$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, la fonction $f_{\alpha,\beta}$ étant également positive sur $[2,+\infty[$, on en déduit par contraposée du critère du petit o que cette dernière n'est pas intégrable sur $[2;+\infty[$.

Conclusion : la fonction $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2;+\infty[$ si et seulement si ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)).

5. Déterminer les primitives suivantes en procédant à un changement de variable adéquat :
   1. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ Changement de variable $u : t \mapsto \sqrt{t}$
   2. $\displaystyle\int \frac{\ln t dt}{t+t(\ln t)^2}$ $u = \ln t$ ; on trouve $\frac{1}{2}\ln(|1+u^2|)+C$, soit $\frac{1}{2}\ln(|1+(\ln t)^2|)+C$
   3. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}dt}{e^t+1}$ $u = e^t$ ; $u - \ln(u+1)$ soit $e^t - \ln(e^t+1)+C$
   4. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ $u = \sqrt{t^2-1}$ ; $2\arcsin u + C = 2\arcsin(\sqrt{(t^2-1)})+C$

   pour un intervalle où $t$ est positif, sinon, un signe "-" se glisse dans le résultat, puisqu'alors $t = -\sqrt{1+u^2}$
   5. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$ $u = \ln t$ ; $2\sqrt{u+1}+C = 2\sqrt{\ln t+1}+C$
   6. $\displaystyle\int \frac{dt}{e^t+1}$ $u = e^t$ ; $\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + C = \ln\frac{e^t}{e^t+1}$+ C

Rédaction du premier point :

Soit $\phi : t \mapsto \sqrt{t} = x$. Il s'agit d'un changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$, $2xdx = dt$ et

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \underset{x=\sqrt{t}}{=} \int \frac{2xdx}{x+x^3} = 2\int \frac{dx}{1+x^2} = 2\arctan(x)+C = 2\arctan(\sqrt{t})+C$$

Si on veut calculer l'intégrale elle-même sur un intervalle $[a,b]$, on écrit :
Soit $\phi : t \mapsto \sqrt{t} = x$. Il s'agit d'un changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a;b]$ dans $[\sqrt{a};\sqrt{b}]$.
Alors $2xdx = dt$ et

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{2xdx}{x+x^3} = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{dx}{1+x^2} = 2(\arctan(\sqrt{a}) - \arctan(\sqrt{b}))$$

**Attention !**, pour le quatrième item, le changement de variable n'est pas bijectif sur $\mathbb{R}$, en revanche, il l'est sur $]1;+\infty[$, comme sur $]-\infty;-1[$
Si on ne peut prouver la bijectivité de la fonction par laquelle on effectue le changement de variable, il reste la possibilité d'utiliser le théorème tel qu'il est dans le cours, c'est-à-dire de repérer sous l'intégrale l'expression $\phi'(x)f'\circ\phi(x)dx$, qui s'intègre directement en $x\mapsto f\circ\phi(x)+C$ **à condition toutefois que $\phi$ et $f$ soient bien de classe $\mathcal{C}^1$.**
**Attention Bis !** on n'a pas abordé ici le problème des bornes impropres.

6. Soit $f:[1;+\infty[\to\mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x,a\geq 1, 0\leq f(x)\leq \frac{a}{x^2}+\frac{1}{a^2}$. La fonction $f$ est-elle intégrable sur $[1;+\infty[$ ?

   Par exemple : à $x$ fixé dans $[1;+\infty[$, choisir $a=x^\alpha$, avec $\alpha=2/3$. Alors $0\leq f(x)\leq\frac{2}{x^{4/3}}$, et ce, pour tout $x\in[1;+\infty[$, puis, par comparaison de fonctions positives, $f$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

   Nous avons vu en TD une autre solution proposée par l'un de vos camarades.

7. **Fonction Gamma**
   Soit $x$ un réel fixé. on définit la fonction $f_x$ telle que : $\forall t\in\mathbb{R}, f_x(t)=t^{x-1}e^{-t}$.
   1. Montrer que $f_x$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si : $x>0$.
      On définit alors la fonction Gamma en posant : $\forall x\in\mathbb{R}, \Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\ dt$.

      Pour tout $x$, la fonction $f_x$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
      En majorant $f_x$ qui est positive, par $x\mapsto t^{x-1}$, laquelle est intégrable au voisinage de $0^+$ (et y est positive) si et seulement si $x>0$, on prouve que $f_x$ est intégrable au voisinage de 0 si $x>0$.
      Par croissances comparées, $t^2t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\to}0$, ce dont on déduit que $f_x(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(\frac{1}{t^2})$.
      Par intégration de relations relations de comparaisons/ par critère du petit o/par comparaison, la fonction $f_x$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

      On remarque par ailleurs que la fonction $f_0: t\mapsto t^{-1}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que par croissances comparées, pour tout $x>0$, $f_x$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

      Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f_x \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ si et seulement si : } x>0}$.
   2. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
      En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}, \Gamma(n+1)=n!$

*Remarque :* Les $f_x$ étant intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout $x > 0$, leur intégrale converge et on peut écrire directement $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

Soit $x > 0$. On pose $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto t^x$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $t > 0$, $u'(t) = e^{-t}$ et $v'(t) = xt^{x-1}$. On remarque que la fonction $uv$ admet une limite nulle en 0 et une limite nulle en $+\infty$ (par croissances comparées).

On en déduit (*Attention !* l'existence de $\Gamma(x+1)$ et les limites de $uv$ en les bornes de l'intervalle suffisent à assurer la convergence de l'autre intégrale introduite par l'IPP - si on n'avait pas prouvé la convergence de la première intégrale, on ne pouvait assurer la convergence de l'autre) que $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}$. Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t} = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}$ et l'on reconnaît ici une expression de $x\Gamma(x)$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$

Une récurrence immédiate, après calcul de $\Gamma(1)$, permet d'affirmer que pour tout $n \in N$, $\Gamma(n+1) = n!$, mais je donne ici une rédaction de cette récurrence comme modèle.

Procédons par récurrence :

Soit $\mathcal{P}$ la proposition définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathcal{P}_n : \Gamma(n+1) = n!$

**Initialisation :**

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = -0 - (-1) = 1$ : $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Par la relation précédemment prouvée, $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$ Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

**Conclusion :** Par théorème de récurrence (*c'est un peu lourd. Si vous souhaitez ne mettre que "par récurrence, on a ainsi montré que...", c'est bon*), $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!}$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. A quelle condition la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$ ?

$t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si sa valeur absolue l'est, or $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathcal{R}e(z-1)}e^{-t}$. La condition (suffisante et nécessaire) pour avoir l'intégrabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est donc que $\mathcal{R}e(z-1) > 0$.

☞La relation $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$ est à comprendre, à connaître, et à savoir démontrer !

8. 1. Justifier que la fonction $f$ telle que : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Continuité de la fonction intégrée sur $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$.
Majoration de la valeur absolue par $\frac{1}{t^2}$ : intégrabilité au voisinage de $+\infty$.
On a donc intégrabilité, donc convergence de l'intégrale : elle est bien définie pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

2. Justifier la convergence de $\int_0^1 \frac{\sin t - t}{t^2}\, dt$.
   En déduire que, au voisinage de 0 : $f(x) \sim -\ln x$.

On utilise un DL du sinus ($\sin t \underset{x\to 0^+}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$) pour trouver que $\frac{\sin t - t}{t^2} \underset{x\to 0^+}{=} -\frac{t}{6}$. La fonction est donc prolongeable par continuité en 0 : elle est intégrable à son voisinage.

Alors $f(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt$ avec le deuxième terme qui vaut $f(1)$.
La première intégrale, par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur un segment, peut s'écrire $\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt = \int_x^1 \frac{\sin t - t}{t^2}\, dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt$. Le premier terme de cette somme admettant une limite en 0, le second divergeant, on a l'équivalence suivante : $\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt \sim \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = -\ln x$.
Ainsi, $\boxed{f(x) = f(1) + \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt \sim -\ln x}$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = \frac{\cos x}{x^2} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

On utilise une IPP pour $x$ fixé (pour la rédaction, voir exercice 7.2) avec $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^2}$. On précise bien TOUT ce qu'il faut préciser (classe $\mathcal{C}^1$, limite en $+\infty$ de $uv$, existence de la première intégrale impliquant celle de la seconde, le crochet ayant une valeur réelle), et on remarque que $f(x) = \frac{\cos x}{x^2} + 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}$.
En majorant en valeur absolue la fonction intégrée dans le second terme par (pour tout $t$ comme il faut...) $\frac{1}{t^3}$, puis en intégrant cette fonction, on trouve le résultat.

9. 1. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$.

Continuité sur l'intervalle ouvert.
En 0 : on se rapporte à l'intégrabilité de ln en 0 (c'est du cours).
En 1 : un équivalent de $\ln(t)$ en 1 est $(t-1)$. Il y a donc convergence en 1.

2. Montrer que : $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx$, puis que : $I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$.

Changement de variable $x = -\ln(t)$. On a prouvé l'existence de l'intégrale à la question précédente. Le changement est $\mathcal{C}^1$, bijectif (strictement décroissant, attention à l'ordre des bornes), de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty[$.

Pour la deuxième partie de la question, on procède également avec précaution : il faut bien, avant de scinder l'intégrale par linéarité, mentionner la convergence de chaque (I = J+K : on a déjà l'existence de I, on prouve celle de J, cela donne celle de K).

$I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\ dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\ dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{-e^{-2x}}{x}\ dx.$
Le changement de variable $t = 2x$ pour le calcul du second terme, puis une application de la relation de Chasles, permet de conclure.

3. En déduire la valeur de $I$.

On pense à majorer le contenu de l'intégrale. Toute majoration ne suffira pas : elle doit être bien choisie, ce qui veut dire que si vous n'y arrivez pas, cela ne signifie pas que ce n'est pas possible, simplement qu'il faut peut-être changer de stratégie. Ici, on peut, par exemple, remarquer que pour tout $t \in [\varepsilon; 2\varepsilon]$, $\frac{e^{-\varepsilon}}{x} \leq \frac{e^{-x}}{x} \leq \frac{e^{-2\varepsilon}}{x}$, ce qui permet, puisque $\ln(2\varepsilon) - \ln(\varepsilon) = \ln 2$ d'obtenir l'encadrement suivant : $e^{-2\varepsilon} \ln 2 \leq I \leq e^{-\varepsilon} \ln 2$, dont on conclut qu'il y a convergence vers $\ln 2$, qui est la valeur de $I$.

10. Soit $f$ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} f(t)}{\sqrt{t-x}}\ dt$.
    (a) Montrer qu'il existe deux réels $L$ et $M$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq L + M|x|$.
    (b) Montrer que $g(x)$ est défini pour tout réel $x$ et s'exprime simplement à l'aide de : $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} f(u+x)}{\sqrt{u}}\ du$.
    (c) Montrer que $h$ est lipschitzienne et en déduire que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

11. Montrer que l'équation : $y' - y = e^{-x^2}$ admet une unique solution $u$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{-\infty} u = \lim\limits_{+\infty} u = 0$.