Intégration sur un intervalle quelconque

1. Justifier l'existence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

   1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\, dx$ 2. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\, dx$ 3. $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$ 4. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ (**exemple classique, à bien savoir faire**) 5. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx$: on utilisera, avec précaution, le changement de variable : $t = \tan x$

2. **Intégrale de Dirichlet** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

   Montrer que les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne sont pas **intégrables** sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ **converge** (*Indication :* IPP)

3. Déterminer la nature des intégrales suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

   1. $\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x^2+x+2)^\alpha}\, dx$ 2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$ 3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2\ln t}\, dt$ 4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\, dt$ 5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\, dt$
   6. $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\, dt$ 7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}\, dx$ 8. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx$

4. **Intégrales de Bertrand**

   Déterminer la nature des intégrales suivantes : $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\, dt$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
   On distinguera les cas : $\alpha > 1$, $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

5. Déterminer les primitives suivantes en procédant à un changement de variable adéquat :

   1. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ 2. $\displaystyle\int \frac{\ln t dt}{t+t(\ln t)^2}$ 3. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}dt}{e^t+1}$ 4. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ 5. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$ 6. $\displaystyle\int \frac{dt}{e^t+1}$

6. Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x, a \geq 1, 0 \leq f(x) \leq \frac{a}{x^2} + \frac{1}{a^2}$. La fonction f est-elle intégrable sur $[1;+\infty[$?

7. **Fonction Gamma**

   Soit x un réel fixé. on définit la fonction f_x telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

   1. Montrer que f_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si : $x > 0$.
      On définit alors la fonction Gamma en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.
   2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
      En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$
   3. Soit $z \in \mathbb{C}$. A quelle condition la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

8.
1. Justifier que la fonction f telle que : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\ dt$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Justifier la convergence de $\int_0^1 \frac{\sin t - t}{t^2}\ dt$.
   En déduire que, au voisinage de 0 : $f(x) \sim -\ln x$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, au voisinage de $+\infty$, on a :
   $f(x) = \frac{\cos x}{x^2} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

9.
1. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\ dt$.
2. Montrer que : $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\ dx$, puis que : $I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\ dx$.
3. En déduire la valeur de I.

10. Soit f une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} f(t)}{\sqrt{t-x}}\ dt$.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels L et M tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq L + M|x|$.
   (b) Montrer que $g(x)$ est défini pour tout réel x et s'exprime simplement à l'aide de :
   $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} f(u+x)}{\sqrt{u}}\ du$.
   (c) Montrer que h est lipschitzienne et en déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

11. Montrer que l'équation : $y' - y = e^{-x^2}$ admet une unique solution u sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{-\infty} u = \lim\limits_{+\infty} u = 0$.