Révisions sur l'intégration - exercices et D.M.

1. Calculer les intégrales suivantes :
   1. $\displaystyle\int_1^3 (x^6-3x^2+2)dx$ 2. $\displaystyle\int_1^6 (\frac{3x^7}{7}-3x^2+2)dx$ 3. $\displaystyle\int_{10}^{11}(ax^{n_1}+bx^{n_2}+cx^{n_3})dx$, pour n_1, n_2 et n_3 dans $\mathbb{N}$, a, b, c quelconques 4. $\displaystyle\int_a^b e^{-12x}dx$, a et b dans $\mathbb{R}$ 5. $\displaystyle\int_1^3 e^{\alpha x}dx$

2. Déterminer les primitives suivantes :
   1. $\displaystyle\int te^{t^2}dt$ 2. $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t}dt$ 3. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\ln t}$ 4. $\displaystyle\int \cos t\sin t dt$ 5. $\displaystyle\int \tan t dt$
   6. $\displaystyle\int \frac{t^2}{1+t^3}dt$ 7. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt$ 8. $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^4}dt$ 9. $\displaystyle\int \frac{1}{it+1}dt$

3. Déterminer les primitives suivantes par IPP :
   1. $\displaystyle\int t\ln t dt$ 2. $\displaystyle\int t\arctan t dt$ 3. $\displaystyle\int (t^2-t+1)e^{-t}dt$ 4. $\displaystyle\int (t-1)\sin t dt$ 5. $\displaystyle\int t\sin^3 t dt$
   6. $\displaystyle\int (t+1)\text{ch } t dt$ 7. $\displaystyle\int t\sin t e^t dt$

4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, puis déterminer une primitive de :
   1. $\frac{3X}{X^2-1}$ 2. $\frac{X^3-2X^2+3X}{X^2-1}$ 3. $\frac{3X^4+2X-3}{X^2-2X+1}$ 4. $\frac{3X+2}{X(X^1)^2}$ 5. $\frac{1}{(X+1)(X-3)^3}$ 6. $\frac{1}{X^4+1}$

5. Déterminer une primitive de 1. $x\mapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$ 2. $x\mapsto \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ sur $]-1,+\infty[$ à l'aide du changement de variable $t=\sqrt[6]{x+1}$.

6. Déterminer les primitives suivantes en procédant à un changement de variable adéquat :
   1. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ 2. $\displaystyle\int \frac{\ln t dt}{t+t(\ln t)^2}$ 3. $\displaystyle\int \frac{e^{2t}dt}{e^t+1}$ 4. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ 5. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$ 6. $\displaystyle\int \frac{dt}{e^t+1}$

7. Calculer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :
   1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\alpha+k\beta}$ pour α et β des réels 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
   5. $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k\sin\frac{k\pi}{n+1}$ 6. $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

   Donner un équivalent en $+\infty$ de $\sum\limits_1^n \sqrt{k}$.

8. Déterminer les primitives suivantes : 1. $\displaystyle\int\cos^3$ 2. $\displaystyle\int\cos^4$ 3. $\displaystyle\int\cos^2\sin^2$ 4. $\displaystyle\int\cos^3\sin$

9. Application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz
   1. Montrer que pour toute fonction f continue et strictement positive sur $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f} \geq (b-a)^2$ Dans quel cas a-t-on égalité ?
   2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0)=0$. Montrer que $\displaystyle 2\int_0^1 f^2 \leq \int_0^1 (f')^2$
      (*Indication :* on pourra écrire $f(x)=\int_0^x 1\times f'$)

D.M.

1. (a) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$: $\frac{X}{X^4+X^2+1}$. (*Indication :* On pourra calculer $(X^2+1)^2$)
   (b) En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
2. (a) Déterminer une primitive de $\frac{18X-15}{(3X^2-5X-7)^5}$
   (b) Par un changement de variable à préciser, montrer que $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x^2+5x-7)^5} = \int \frac{dt}{t^2+1)^5}$ (on précisera le lien entre les bornes des intégrales)
   (c) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note I_k la primitive qui s'annule en 0 de $\frac{1}{(X^2+1)^k}$. Déterminer une relation de récurrence entre I_k et I_k+1, et en déduire I_2 et I_3.
3. Soit f une application continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(0)=f(0)$ et, pour $x>0, g(x)=\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$
   (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors g l'est aussi.
4. Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$; continue et positive. On pose $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}(f(x))$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\left(\displaystyle\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$. Etablir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = M$.
5. **Intégrales de Wallis.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
   (a) Montrer que $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$
   (b) Etablir que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=\frac{n}{n+1}I_{n-1}$. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $I_{2p}=\frac{1.3.5...2p-1}{2.4.6.....(2p)}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1}=\frac{2.4...2p}{1.3.5...(2p+1)}$
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(\frac{I_{n+1}}{I_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 1 en $+\infty$.
   (d) En déduire, en considérant la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, un équivalent de I_n.