Exercice 3

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin 4x \, dx$$

- linéariser $\sin^2 x$

⚠ Oubli des 2

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2$

$= -\dfrac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^{ix-ix} + e^{-i2x}\right) = -\dfrac{1}{4}\left(-2 + 2\underbrace{\left(\dfrac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)}_{\cos(2x)}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

donc $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) \sin 4x \, dx$

$= \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 4x \, dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos 2x \sin 4x \, dx$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{\cos 4x}{4}\right]_0^{\pi} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos 2x \sin 4x \, dx$

On sait que $2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) = \sin a + \sin b$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sin a + \dfrac{1}{2}\sin b$

Avec $a = 6x$ et $b = 2x$, on a alors

$I_2 = \dfrac{1}{8}\left(-\cos 4\pi + \cos 0\right) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x \, dx$

$= 0 - \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 6x \, dx - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx$

$= -\dfrac{1}{4}\left(\left[-\dfrac{\cos 6x}{6}\right]_0^{\pi} + \left[-\dfrac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}\right)$

$= -\dfrac{1}{4}\left(-\cos 6\pi + \cos 0 - \cos 2\pi + \cos 0\right)$

$I_2 = 0$

OK, mais tu pouvais <u>dès le début</u> ne travailler qu'avec des exponentielles.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \sin 4x \, dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \times \text{au choix} \begin{cases} \mathrm{Im}\left(e^{i4x}\right) \\ \text{ou} \\ \dfrac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i} \end{cases} dx$$