

Exercice 1

Voir TP

Exercice 2

Le laser hélium-néon émet à $\lambda = 633 \text{ nm}$ et le rayon de son *waist* est noté w_0 .

À la distance $D = 500 \text{ m}$, le rayon du faisceau est $r = 10 \text{ cm}$; cela conduit géométriquement à la divergence θ du faisceau par :

$$\theta \approx \frac{r}{D} = 2,0 \cdot 10^{-4} \approx 42''$$

La formule qui donne la divergence du faisceau est $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$, d'où le *waist* :

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi \theta} = 1 \text{ mm}$$

Rq : La longueur de Rayleigh est $L_R = \pi \frac{w_0^2}{\lambda} \approx 5 \text{ m}$; à la distance $D \gg L_R$, le faisceau est largement conique, hypothèse nécessaire pour les considérations géométriques.

Exercice 3

Par définition

$$\begin{cases} I_0 e^{-2\left(\frac{r_5}{a}\right)^2} = \frac{I_0}{20} \\ I_0 e^{-2\left(\frac{r_1}{a}\right)^2} = \frac{I_0}{100} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} r_5 = a \sqrt{\frac{\ln 20}{2}} = 1,22a \\ r_1 = a \sqrt{\frac{\ln 100}{2}} = 1,52a \end{cases}$$

L'assimilation de a au rayon de la tache est donc justifiée.

Exercice 4

Pour chaque effectif atomique, on identifie les variations en prenant en compte positivement les termes de création, et négativement les termes de destruction.

Les atomes dans l'état E_3 sont créés par la pompe proportionnellement à N_1 , détruits par désexcitation proportionnellement à N_3 donc

$$dN_3 = +WN_1 dt - MN_3 dt$$

En plus des termes d'absorption et d'émission spontanée ou stimulée entre les niveaux E_2 et E_1 , on doit ajouter les termes suivants.

Un atome dans l'état E_2 est créé à chaque fois qu'un atome au niveau E_3 se désexcite donc

$$dN_2(\text{desx}) = +MN_3 dt$$

Un atome dans l'état E_1 disparaît à chaque fois que la pompe le fait passer à l'état E_3 donc

$$dN_1(\text{pomp}) = -WN_1 dt$$

On en déduit

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -(W + B_{12}\mathcal{D})N_1 + (A_{21} + B_{21}\mathcal{D})N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = B_{12}\mathcal{D}N_1 - (A_{21} + B_{21}\mathcal{D})N_2 + MN_3 \end{cases}$$

Exercice 5

- a) Par résolution de l'équation différentielle, en notant $\Pi(0) = \Pi_0$, on obtient

$$\Pi(z) = \Pi_0 e^{\frac{\hbar B(n_2 - n_1)}{c} z}$$

Π est donc une fonction croissante de z , il y a amplification si $n_2 > n_1$. À l'équilibre thermique, $n_2 < n_1$, il faut donc une inversion de population.

- b) Le gain par unité de longueur est

$$\gamma = \frac{d\Pi}{dz} = \frac{\hbar B(n_2 - n_1)}{c}$$

Il est maximal si le pompage assure $n_2 \approx n$ et $n_1 \approx 0$ donc

$$\gamma_{\max} = \frac{\hbar B n}{c}$$

- c) La longueur caractéristique d'amplification est

$$L = \frac{1}{\gamma_{\max}} = \frac{c}{\hbar B n}$$

Le gain est égal à environ 99% de sa valeur maximale quand la distance parcourue vaut $5L$, donc il faut

$$N = \frac{5L}{a} = \frac{5c}{\hbar B n a}$$

allers-retours.

- d) L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d^2 V_A}{dt^2} - 2\varepsilon\omega_0 \frac{dV_A}{dt} + \omega_0^2 V_A = 0$$

Exercice 6

- a) L'unique fréquence du laser monochromatique est celle du photon émis par la désexcitation, soit

$$F_{12} = \frac{\omega_{12}}{2\pi} = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

- b) Les nœuds de vibration aux extrémités de la corde conduisent à chercher une solution du type onde stationnaire. On en déduit que la longueur de la corde est égale à un nombre entier n de fois celle d'un fuseau de vibration, soit

$$a = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f}$$

$$\text{donc } f_n = n \frac{c}{2a} \text{ et } f_1 = \frac{c}{2a}$$

On vérifie que

$$\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{c}{2a} = f_1$$

- c) Le laser monochromatique ne peut donc fonctionner que si F_{12} correspond à l'une des fréquences sélectionnées par la cavité, donc si le rapport $\frac{F_{12}}{f_1}$ est un nombre entier.

- d) Trois cas sont à envisager.

- i) Si $\Delta f \leq \frac{\Delta F}{2}$ alors il y a au moins deux fréquences sélectionnées dans la bande d'amplification de largeur ΔF , le laser est donc multimode.

- i) Le discriminant de l'équation caractéristique vaut

$$\Delta = 4\varepsilon^2 \omega_0^2 - 4\omega_0^2 \approx -4\omega_0^2$$

Les racines de cette équation sont donc complexes

$$r = \varepsilon\omega_0 \pm i\omega_0$$

$$\text{donc } V_A(t) = e^{\varepsilon\omega_0 t} [E \cos(\omega_0 t) + F \sin(\omega_0 t)]$$

L'utilisation des conditions initiales donne, après simplification des termes négligeables, $E = V_0$ et $F = 0$. On en déduit

$$V_A(t) = V_0 e^{\varepsilon\omega_0 t} \cos(\omega_0 t)$$

- ii) C'est un régime pseudo-périodique amplifié, de pseudo-période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- iii) La saturation est atteinte quand l'amplitude vaut $V_{\text{SAT}} = 100V_0$, soit

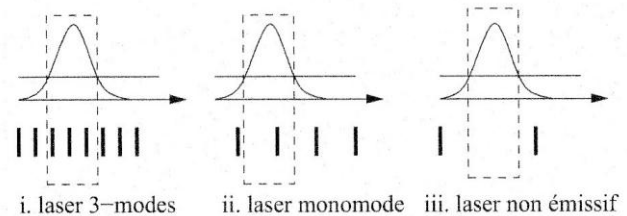
$$V_0 e^{\varepsilon\omega_0 t} = 100V_0 \text{ soit } t = \frac{\ln 100}{\varepsilon\omega_0}$$

Le nombre de pseudo-oscillations effectuées à cette date est

$$N = \frac{t}{T_0} = \frac{\ln 100}{2\pi\varepsilon}$$

- ii) Si $\Delta f \approx \Delta F$ alors il y a en moyenne une seule fréquence sélectionnée dans la bande d'amplification et le laser est monomode.

- iii) Si $\Delta f \geq 2\Delta F$ alors il y a moins d'une chance sur deux qu'une fréquence sélectionnée soit dans la bande d'amplification et, par défaut, le laser est alors non émissif.



- e) L'intervalle spectral de la cavité est

$$\Delta f = \frac{c}{2a} = 0,75 \text{ GHz}$$

On a donc

$$\frac{\Delta F}{\Delta f} = 2,67$$

et il y a 2 ou 3 modes.

Exercice 7

- a) La longueur de Rayleigh est l'ordre de grandeur de la longueur de la zone cylindrique du faisceau laser. Il est donc intéressant de pouvoir la maîtriser.
- b) D'après le cours, en positionnant la lentille dans la zone cylindrique du faisceau, le faisceau émergent est cylindrique au voisinage du foyer image F' et

$$\theta' = \frac{a}{f'} = \frac{a'}{L_r} = \frac{\lambda}{\pi a'}$$

$$\text{donc } \begin{cases} a' = \sqrt{\frac{\lambda L_r}{\pi}} \\ f' = \frac{a L_r}{a'} \end{cases}$$

$$\text{donc } f' = a \sqrt{\frac{\pi L_r}{\lambda}} = 1,64 \text{ m}$$