## Exercice 1

1) Voir cours

2) Voir cours

3) $\vec{F}_{ic} = -2m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{R_1}$

$[F_{ic}] = M \times L \times T^{-2}$

Or $[m] = M$ ; $[\omega] = T^{-1}$ et $[v] = L.T^{-1}$

La relation est donc homogène.

4) Centrifuge

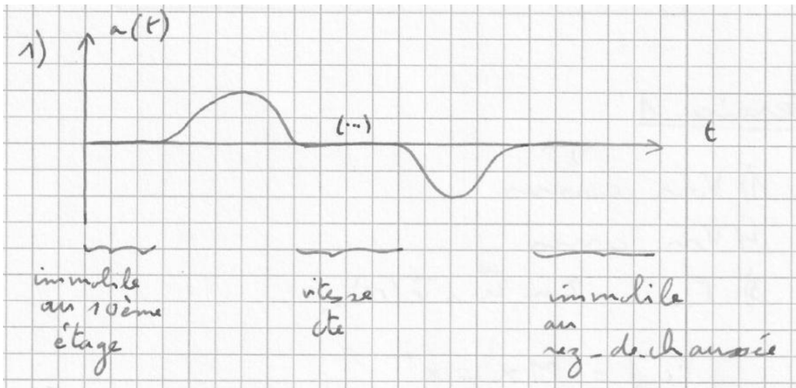
5) Voir cours :

$$\underbrace{\vec{g}}_{\text{champ de pesanteur}} = \underbrace{\vec{G}_T}_{\text{champ gravitationnel}} + \underbrace{\omega^2\,\vec{HM}}_{\text{champ inertiel}}$$

Il y a bien une différence.

## Exercice 2

1)




2) Syst : personne (masse m)

Réf : lié à l'ascenseur (RNG)

BFE : - poids $\vec{P}_0 = m g \vec{u}_z$ ; - réaction balance $\vec{R}$

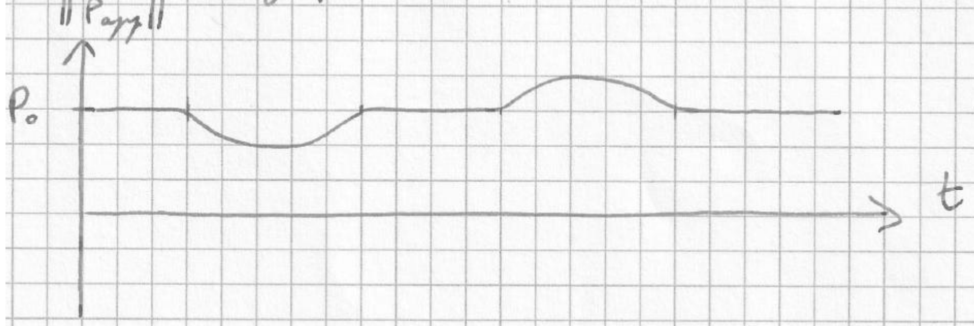
- force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m a \vec{u}_z$

On peut donc proposer :

$$\boxed{\vec{P}_{app} = \vec{P}_0 + \vec{F}_{ie}}$$

3) On a donc $\vec{P_{app}} = mg\vec{u_z} - ma\vec{u_z}$
$= m(g - a(t))\vec{u_z}$

D'où le graphe :

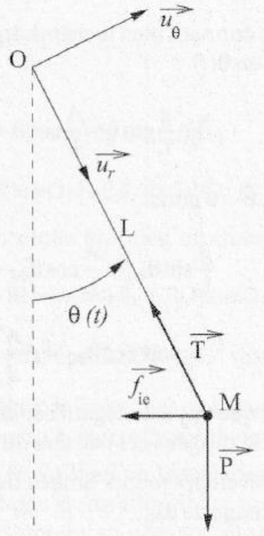


4) Pour avoir $\vec{P_{app}} = \vec{0}$ (impesanteur)
il faut que $\boxed{a(t) = g}$ autrement dit
que l'ascenseur soit en translation
rectiligne uniformément accélérée à $9,8\ m.s^{-2}$.

5) On retrouve cette situation par exemple dans les avions Zero G (vols paraboliques) ou dans la station spatiale internationale. Dans les 2 cas on se place dans le référentiel non galiléen de l'avion ou de la station, qui sont en chute libre ($\vec{a} = \vec{g}$). Les forces appliquées à tout objet présent à l'intérieur sont $\vec{P}$ et $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a}$, qui se compensent exactement. D'où une résultante des forces nulle dans ce référentiel → impesanteur.

**Exercice 3**

a) On complète le schéma en dessinant les forces réelles et la force d'inertie d'entraînement qui s'exercent sur M.




Voici les composantes des vecteurs cinématiques et des vecteurs forces dans la base cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} L \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{v}_r\left|\begin{array}{l} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{a}_r\left|\begin{array}{l} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{P}\left|\begin{array}{l} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{T}\left|\begin{array}{l} -T \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{f}_{ie}\left|\begin{array}{l} -mA\sin\theta \\ -mA\cos\theta \\ 0 \end{array}\right.$$

Dans le référentiel non galiléen en translation, la loi de la quantité de mouvement appliquée à M s'écrit

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} = m\vec{a}_r \text{ donc}$$

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T - mA\sin\theta = -mL\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta + 0 - mA\cos\theta = mL\ddot{\theta} \end{cases}$$

b) Le moment cinétique en O de M est

$$\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_r = mL^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Les moments en O des trois forces sont

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -Lmg\sin\theta\vec{u}_z$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{T}) = \vec{0}$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie} = -LmA\cos\theta\vec{u}_z$$

Dans le référentiel non galiléen en translation, la loi du moment cinétique en O appliquée à M s'écrit

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) + \mathcal{M}_O(\vec{T}) + \mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\text{soit } -Lmg\sin\theta + 0 - LmA\cos\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

Les deux lois donnent bien la même équation différentielle non linéaire en $\theta(t)$ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta + \frac{A}{L}\cos\theta = 0$$

À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ donc

$$\frac{g}{L}\sin\theta_{eq} + \frac{A}{L}\cos\theta_{eq} = 0$$

$$\text{soit } \tan\theta_{eq} = -\frac{A}{g}$$

Il est normal que $\theta_{eq}$ soit négatif car la force d'inertie d'entraînement est dirigée vers l'arrière du train.

d) On fait les développements limités des fonctions $\cos\theta$ et $\sin\theta$ au voisinage de $\theta_{eq}$.

$$\begin{cases} \sin\left(\theta_{eq}+\varepsilon(t)\right) = \sin\theta_{eq}\cos\varepsilon(t) + \sin\varepsilon(t)\cos\theta_{eq} \\ \cos\left(\theta_{eq}+\varepsilon(t)\right) = \cos\theta_{eq}\cos\varepsilon(t) - \sin\theta_{eq}\sin\varepsilon(t) \end{cases}$$

$$\text{donc} \begin{cases} \sin\theta \simeq \sin\theta_{eq} + \varepsilon(t)\cos\theta_{eq} \\ \cos\theta \simeq \cos\theta_{eq} - \varepsilon(t)\sin\theta_{eq} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation différentielle. $\theta_{eq}$ est une constante donc $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$ et

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L}\sin\theta_{eq} + \frac{g}{L}\varepsilon\cos\theta_{eq} + \frac{A}{L}\cos\theta_{eq} - \frac{A}{L}\varepsilon\sin\theta_{eq} = 0$$

En utilisant la relation définissant $\theta_{eq}$, on simplifie cette équation et on obtient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L}\cos\theta_{eq}\left(1+\frac{A^2}{g^2}\right)\varepsilon = 0$$

De plus

$$\cos^2\theta_{eq} = \frac{1}{1+\tan^2\theta_{eq}} = \frac{1}{1+\frac{A^2}{g^2}}$$

L'équation différentielle s'écrit donc

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L}\sqrt{1+\frac{A^2}{g^2}}\,\varepsilon = 0$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0$ avec

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}\sqrt{1+\frac{A^2}{g^2}}$$

donc de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}{\sqrt[4]{1+\frac{A^2}{g^2}}}$$