Exercice 1

1. (…) $\overrightarrow{v_O} = \frac{\vec{v}}{2}$
2. $\Omega = \frac{v_O}{R} = \frac{v}{2R}$

Exercice 2

1) $v_0 = \omega . r_0$.

2)

2.a) A l'extérieur du virage : $v_1 = \Omega.(R + \frac{e}{2}) = \left(1 + \frac{e}{2.R}\right).v_0$.

2.b) A l'intérieur du virage : $v_2 = \Omega.(R - \frac{e}{2}) = \left(1 - \frac{e}{2.R}\right).v_0$.

3)

3.a) Donc :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R+\frac{e}{2}}{R+\frac{e}{2}} = \left(1+\frac{e}{2.R}\right).\left(1-\frac{e}{2.R}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{e}{R} \neq 1$$

Condition de roulement sans glissement :

$$\begin{cases} v_1 = \omega . r_1 \\ v_2 = \omega . r_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} \approx 1 + \frac{e}{R} \neq 1$$

3.b) Les trains on des roues coniques ! Ainsi, ils penchent dans les courbes.

4)

4.a) Le métro couine car ses roues glissent dans les virages de faible rayon R de courbure.

4.b) Les voitures ont des différentiels pour assurer une vitesse différente sur chaque roue.

Exercice 3

a) Il y a freinage si la vitesse angulaire diminue. Appliquons la loi de la puissance cinétique à la roue. Il y a non-glissement donc la puissance des forces de contact est nulle et $v(O) = R\omega$. On en déduit

$$-\Gamma_r\omega + mg\sin\alpha\cdot R\omega = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m(R\omega)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\right]$$

$$\text{soit } \left(-\Gamma_r + mgR\sin\alpha\right)\omega = \left(mR^2 + J\right)\dot{\omega}\omega$$

Il y a freinage si $\dot{\omega} < 0$ donc si

$$\Gamma_r > mgR\sin\alpha$$

Dans ce cas,

$$\dot{\omega} = \frac{-\Gamma_r + mgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}mR^2} \text{ et } \ddot{x} = R\dot{\omega} = \frac{-\Gamma_r + mgR\sin\alpha}{\frac{3}{2}mR}$$

b) Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la roue. La force tangentielle s'oppose au glissement éventuel donc est dirigée selon $-x$.

$$\begin{vmatrix} mg\sin\alpha \\ mg\cos\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T \\ -N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha + \frac{2\Gamma_r}{3R} \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

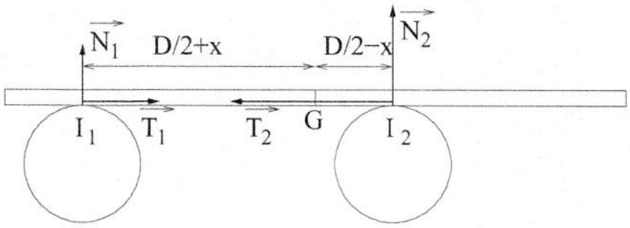
La loi de Coulomb indique qu'il y aura non-glissement si

$$T < \mu_s N \text{ soit } \Gamma_r < \frac{mgR}{2}(3\mu_s\cos\alpha - \sin\alpha)$$

c) On ne peut freiner sans glissement que si la valeur minimale est inférieure à la valeur maximale, soit (après simplifications) $\tan\alpha < \mu_s$. Ce résultat est immédiat à vitesse constante par aplication de la loi de la quantité de mouvement.

Exercice 4

Prenons les notations du schéma suivant.



Les lois de Coulomb en présence de glissement donnent

$$T_1 = \mu_d N_1 \text{ et } T_2 = \mu_d N_2$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la plaque donne

$$\begin{vmatrix} T_1 \\ N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T_2 \\ N_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc} \begin{cases} T_1 - T_2 = m\ddot{x} \\ N_1 + N_2 = mg \end{cases}$$

La plaque ne pivote pas donc son moment cinétique autour de l'axe horizontal passant par G est donc nul à tout instant. La loi du moment cinétique autour de cet axe dans le référentiel barycentrique s'écrit donc

$$\left(\frac{D}{2} + x\right) N_1 - \left(\frac{D}{2} - x\right) N_2 = 0$$

On résout le système et on en déduit

$$\begin{cases} N_1 = \frac{mg}{2} - mg\frac{x}{D} \\ N_2 = \frac{mg}{2} + mg\frac{x}{D} \end{cases} \quad \text{donc} \begin{cases} T_1 = \frac{\mu_d mg}{2} - \mu_d mg\frac{x}{D} \\ T_2 = \frac{\mu_d mg}{2} + \mu_d mg\frac{x}{D} \end{cases}$$

La loi de la quantité de mouvement donne donc

$$-2\mu_d mg\frac{x}{D} = m\ddot{x} \text{ soit } \ddot{x} + \frac{2\mu_d g}{D}x = 0$$

C'est une équation différentielle d'oscillateur harmonique. La période des oscillations est donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{D}{2\mu_d g}}$$

Exercice 5

a) L'application de la loi du moment cinétique à la roue dans le référentiel barycentrique galiléen (O, x, y, z) s'écrit

$$T \cdot R = 0 \text{ donc } T = 0$$

b) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Mg\sin\alpha \\ -Mg\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{donc} \begin{cases} (1)\ F_x = (M+m)g\sin\alpha \\ (2)\ F_y + N = (M+m)g\cos\alpha \end{cases}$$

c) La loi de la puissance cinétique donne

$$\vec{F}\cdot\vec{V} + \vec{P}\cdot\vec{V} + \vec{P}_r\cdot\vec{V} + \vec{N}\cdot\vec{V} = 0$$

$$\text{soit } F_x V - MgV\sin\alpha - mgV\sin\alpha = 0$$

qui est équivalent à l'équation (1).

d) Le bras de levier de la force exercée par la roue sur l'axe est nul. Celui de $\vec{P}$ vaut $a\cos\alpha$, celui de $\vec{F}_x$ est nul, celui de $\vec{F}_y$ est b. La loi du moment cinétique appliquée au cadre s'écrit

$$+bF_y - Mga\cos\alpha = 0$$

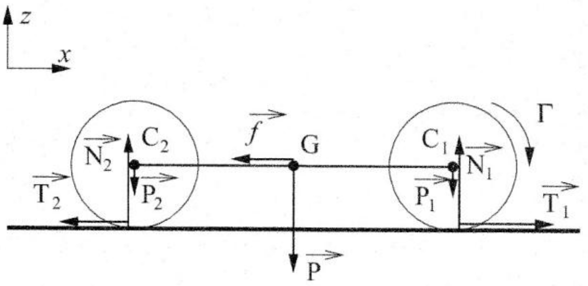
e) On en déduit

$$F_y = \frac{Mga\cos\alpha}{b},\ F_x = (M+m)g\sin\alpha$$

$$\text{et } N = \left[M\left(1 - \frac{a}{b}\right) + m\right] g\cos\alpha$$

Exercice 6

a) Voici le schéma des différentes actions, la force tangentielle $\vec{T}_1$ est motrice, la force $\vec{T}_2$ fait tourner la roue arrière.



b) Il y a roulement sans glissement donc $V = R\omega$.

c) Les forces de contact ne travaillent pas car il y a roulement sans glissement. Le sol étant horizontal, les poids ne travaillent pas. La loi de la puissance cinétique s'écrit

$$\Gamma\omega - hV \cdot V = 0 \text{ soit } \Gamma\frac{V}{R} = hV^2$$

$$\text{donc } V = \frac{\Gamma}{hR}$$

d) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{vmatrix} -T_2 \\ 0 \\ N_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_1 \\ 0 \\ N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -(M+2m)g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -hV \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \begin{cases} T_1 - T_2 = hV \\ N_1 + N_2 = (M+2m)g \end{cases}$$

e) La loi du moment cinétique pour les roues avant s'écrit

$$-RT_1 + \Gamma = 0 \text{ donc } T_1 = \frac{\Gamma}{R}$$

f) La loi du moment cinétique pour les roues arrière s'écrit

$$RT_2 = 0 \text{ donc } T_2 = 0$$

g) Le système étudié est soumis au couple $-\Gamma$, à la force d'axe exercée par les roues avant sur le cadre, de moment nul car le bras de levier est nul, et aux autres forces $\vec{N}_2$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}$ et $\vec{F}$. En identifiant les différents bras de levier, la loi du moment cinétique s'écrit

$$-\Gamma + LN_2 - Lmg - \frac{L}{2}Mg = 0 \text{ donc } N_2 = \frac{\Gamma}{L} + \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

h) En injectant dans la relation de la question (d), on en déduit

$$N_1 = (M+2m)g - \left[\frac{\Gamma}{L} + \left(\frac{M}{2} + m\right)g\right]$$

$$\text{soit } N_1 = -\frac{\Gamma}{L} + \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

Un dérapage est possible si $T_1 > \mu N_1$, donc si

$$\Gamma\left(\frac{1}{R} + \frac{\mu}{L}\right) > \left(\frac{M}{2} + m\right)\mu g$$