# Programme

Révisions sur l'intégration

Fonction continue par morceaux et définition de l'intégrale

Propriétés de l'intégrale (linénarité, positivité, croissance, inégalité des modules, relation de Chasles, valeur moyenne) + Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions réelles, avec cas d'égalité, convergence des sommes de Riemann)

Intégrale fonction d'une borne : Existence de primitives pour une fonction continue

Méthodes de calcul (primitive, IPP, changement de variable, intégration d'une fonction rationnelle, cas particuliers (avec $P$ un poynôme, $P(x)e^{\alpha x}$,$P(x)\sin x$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\cos^m x \sin^p x$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arctan x$)

Équations différentielles linéaires

Equations d'ordre 1

Théorème de Cauchy-Lipschitz (pour ordre 1 et 2)

Structure des espaces des solutions

Méthode de résolution : résoudre l'équation homogène associée (H). Pour une solution particulière : méthode de la variation de la constante.

Equations d'ordre 2 à coefficients constants

Utilisation de l'équation caractéristique pour résoudre l'équation homogène associée (H).

# Questions de cours

**Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions réelles** :
$\left(\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\ dt\right) \times \left(\int_a^b g^2(t)\ dt\right)$.

**Convergence des sommes de Riemann** : $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt$.
En particulier, si $f$ est continue sur $[0,1]$ : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ dt$.

**Existence de primitives pour une fonction continue**
Toute fonction **continue** sur $I$ admet des primitives sur $I$.
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est **la** primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $a$.
Les primitives de $f$ sont toutes les fonctions de la forme $F + k$ où $k$ est une constante.

**Théorème de Cauchy-Lipschitz** On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 et normalisée, i.e. de la forme

$$(E) : x' + a(t)x = b(t),$$

où $a$ et $b$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $x$ une fonction inconnue dérivable sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Le problème de Cauchy associé à l'équation $(E)$ et à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ (avec $t_0$ donné dans $I$ et $x_0$ donné dans $\mathbb{K}$) admet une unique solution.

**Théorème de Cauchy-Lipschitz** On considère une équation linéaire scalaire d'ordre 2 normalisée

$$(E) : y'' + ay' + by = c(t),$$

où $a$ et $b$ sont des constantes, $c$ est une fonction continue sur un intervalle $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $y$ est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$.
Soit $t_0 \in I$, $(u_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy associé à $(E)$ et à la condition initiale $y(t_0) = u_0, y'(t_0) = v_0$ admet une unique solution sur $I$.