Exercice 8 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant $A^T A = AA^T$. Montrer que la matrice $M = (A^{-1})^T A$ est orthogonale.

Calcul, assez simple.

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.
2. Montrer que f est linéaire.

---

1. Soit une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_i)1 \leqslant i \leqslant n$. On note $\mathcal{B}'$ la famille $(f(e_i))$. Alors $\forall i, j, (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$: $\mathcal{B}'$ est une b.o.n.
2. Soient x et y dans E, $||f(\lambda x+y)-\lambda f(x)-f(y)||^2 = (f(\lambda x+y)-\lambda f(x)-f(y)|f(\lambda x+y)-\lambda f(x)-f(y)) = (f(\lambda x+y)|f(\lambda x+y))+(\lambda f(x)+f(y)|\lambda f(x)+f(y))-2(\lambda f(x)+f(y)|f(\lambda x+y))$ par linéarité et symétrie du produit scalaire.
D'après l'énoncé, $(f(\lambda x+y)|f(\lambda x+y)) = (\lambda x+y|\lambda x+y)$, et, par linéarité du produit scalaire, et la même prorpiété de f, $(\lambda f(x)+f(y)|\lambda f(x)+f(y)) = (\lambda x+y|\lambda x+y)$ et $(\lambda f(x)+f(y)|f(\lambda x+y)) = (\lambda x+y|\lambda x+y)$. Ainsi $||f(\lambda x+y)-\lambda f(x)-f(y)||^2 = 0$. Par définie positivité de la norme, on en déduit que $f(\lambda x+y) = \lambda f(x)+f(y)$.
Ceci étant valable pour tout x et tout y de E, on en déduit que f est linéaire.

Exercice 10 : Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice réelle orthogonale.
Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

Pour $X = \begin{pmatrix}1\\1\\..\\1\end{pmatrix}$, $X^T AX = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$. Or $X^T AX = (X|AX)$, $||X|| = \sqrt{n}$ et $||AX|| = ||X||$, puisque A est orthogonale. L'inégalité de CS permet alors de conclure.

Exercice 11 : Soit u et v deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien orienté. Quels sont les isométries vectorielles qui envoient u sur v ?

La rotation d'angle $(\widehat{u,v})$ est l'unique rotation qui convient.
Si $u = v$, la réflexion qui envoie u sur v est la réflexion par rapport à Vect(u).
Si $u \neq v$, la reflexion qui envoie u sur v est la réflexion par rapport à Vect$(u-v)^\perp$.

Exercice 12 : Soient une réflexion σ et une rotation r du plan. Montrer que $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$. À quelle condition σ et r commutent ?

Pour le premier point, on remarque que $\sigma \circ r$ est une isométrie indirecte du plan, donc une réflexion, ce qui implique que $(\sigma \circ r) \circ (\sigma \circ r) = \mathrm{id}$, puis, par composition à droite par r^{-1}, que $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$
Second point : la commutativité s'écrit $\sigma \circ r = r \circ \sigma$. En composant à gauche par σ, on obtient : $r = \sigma \circ r \circ \sigma$. Ainsi $r = r^{-1}$, ce qui n'est possible que si l'angle θ de la rotation plane r est $0[\pi]$.
Inversement, on constate que la condition est suffisante pour assurer la commutativité.

Ainsi, une réflexion σ et une rotation r ne commutent que si et seulement si r est l'identité ou une symétrie centrale.

EXERCICE 13 : Montrer que l'ensemble des matrices d'ordre n muni du produit scalaire usuel est somme directe orthogonale des matrices symétriques et des matrices antisymétriques d'ordre n.

Soit A une matrice, alors $A = 1/2(A + A^T) + 1/2(A - A^T)$.
Soient A symétrique et B antisymétrique, alors $(A|B) = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB)$ et, par symétrie du produit scalaire $(A|B) = (B|A) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(-BA) = -\mathrm{tr}(BA) = -\mathrm{tr}(AB) = -(A|B)$, d'où $(A|B) = 0$, puis, A et B étant quelconques, ces sous-espaces sont orthogonaux.

EXERCICE 14 :
Soit $A = (a_{i,j})$. Déterminer $\underset{M=(m_{i,j})\in S_n(\mathbb{R})}{inf} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$, où l'ensemble des matrices est muni de son produit scalaire usuel.

L'ensemble des matrices d'ordre n est somme directe orthogonale des matrices symétriques et des matrices antisymétriques d'ordre n. D'après le théorème de projection orthogonale, et puisque la borne inférieure se fait en variant M parmi les matrices symétriques, la quantité recherchée est alors $\delta = d(A, S_n(\mathbb{R}))$, avec $\delta^2 = ||A - p_{S_n(\mathbb{R})}(A)||^2 = ||1/2(A - A^T)||^2 = 1/4 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i, j - a_{j,i})^2$.