Cinématique

1. Etude d'une trajectoire ☺

On donne les équations horaire du mouvement d'un mobile M en coordonnées cartésiennes:

$x(t)= v_1.t$ et $y(t) = -c.t^2 + v_2.t$ $v_1, v_2, c,$ étant des constantes positives

1) Établir l'équation de la trajectoire du mobile M et la représenter. Quelle type de trajectoire est-ce ?

2) Déterminer l'expression de la norme de la vitesse $\|\vec{v}(t)\|$ du mobile M à l'instant t ?

3) Déterminer la date t_1 pour laquelle $\|\vec{v}(t)\|$ est minimale. A quel point de la trajectoire correspond cette vitesse ?

4) Déterminer la date t_2 pour laquelle $\|\vec{v}(t_2)\|=\|\vec{v}(0)\|$. Calculer $y(t_2)$ et conclure.

Rep :3) $t_1=v_2/(2C)$ *4) Rep :* $t_2=2t_1$

2. Équation horaire ☺☺

On traitera les questions suivantes dans les deux cas: n=1 et n=2. Une particule M se déplace sur un axe gradué d'origine O et de vecteur unitaire $\vec{u}_x$. A t = 0 la particule est en O à la vitesse $\vec{v_0}=v_0\vec{u}_x$ avec $v_0=20\,m.s^{-1}$. On soumet alors la particule a une accélération négative: $\vec{a}=a\,\vec{u}_x=-kv^n\,\vec{u}_x$ où k et n sont des constantes positives et v le module de la vitesse.

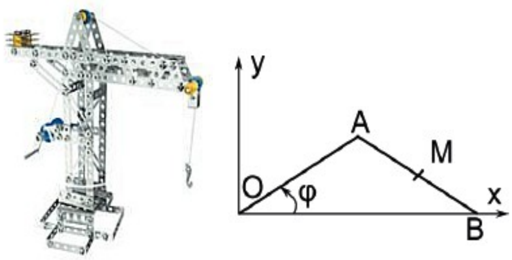
a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$, en déduire en fonction de v_0 et k les expressions de $v(t)$ et $x(t)$.

b) A t = 0, le module de l'accélération est $|a|=2{,}0\,.m.s^{-2}$. A quelle vitesse v_1 et à quel instant t_1 la particule passera-t-elle à d = 150 m de l'origine O ?

Rep : pour $n=1$, $v_1=5{,}0\,m.s^{-1}$ et $t_1=14s$; pour $n=2$, $v_1=9{,}4\,ms^{-1}$ et $t_1=11s$.

3. Jeu de mécano☺☺

On utilise un jeu de mécano pour construire un dispositif constitué de deux barres identiques OA et AB ,chacune de longueur 2b , articulé en A et assujetties à rester dans le plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$. B glisse le long de l'axe Ox et l'angle $\varphi=(\vec{u}_x,\overrightarrow{OA})=\omega t$ avec ω constante. Voir figure ci-contre.



1) Déterminer l'équation de la trajectoire du milieu M de AB.

2) Déterminer la vitesse et l'accélération de M.

Rep :1) $(x/(3b))^2+(y/b)^2=1$; 2) $\vec{a}=-\omega^2\overrightarrow{OM}$

4. Éléments cinématiques et base cylindrique ☺

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant :

$r(t) = a_0.t^2+r_0$, $\theta(t) = \omega.t-\theta_0$ et $z(t) = -v.t$, avec $r_0 = 1\ m$, $a_0 = 1\ m.s^{-2}$, $\omega = 3\ rad.s^{-1}$, $\theta_0 = 2\ rad$ et $v = 2\ m.s^{-1}$.

1) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

2) Calculer la norme de la vitesse de M à la date t = 1 s.

3) Calculer la norme de l'accélération de M à l'instant initial (t = 0).

Rép. : 1) $\overrightarrow{v_{M/R}} = 2a_0.t\,\vec{e_r}+\omega(a_0.t^2+r_0)\vec{e_\theta}-v\,\vec{e_z}$; $\overrightarrow{a_{M/R}} = (2a_0-(a_0.t^2+r_0).\omega^2)\vec{e_r}+4a_0.t.\omega\,\vec{e_\theta}$;
2) $v(1\ s) = 6{,}6\ m.s^{-1}$; **3)** $a(0) = 7\ m.s^{-2}$

5. Mouvement circulaire☺☺

Un point M décrit un cercle d'équation en coordonnées polaires $r=2R\cos\theta$ à la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}=\omega_0$ constante θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

a) Représenter la trajectoire du point M ainsi que la base et les coordonnées polaires associés à M.

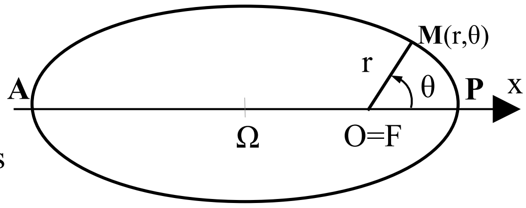
b) Calculer dans la base des coordonnées polaires les composantes de la vitesse et de l'accélération. Donner leurs normes v et a respectives.

c) C désignant le centre de la trajectoire, montrer que l'accélération $\vec{a}(M)$ est colinéaire à $\overrightarrow{CM}$.

<u>Rep :</u> $v=2R\omega_0$ et $a=4R\omega_0^2$

6. Satellite espion ☺☺☺

La trajectoire d'un satellite espion peut être modélisée par une ellipse.
L'équation polaire d'une ellipse avec origine au foyer est :



$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ où p est le paramètre et e, l'excentricité de l'ellipse.

1) Pour un satellite, P est le périgée et A est l' apogée. Déterminer les expressions de r_P et r_A en fonction de p et e.

2) Sachant que le mouvement est tel que $r^2\dot{\theta}=cste=C$, déterminer l'expression de $\vec{v}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ en fonction uniquement de θ, p, e et C.

3) Déterminer $\vec{v}$ en $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, et $\frac{3\pi}{2}$. Représenter, en chacun de ces points, $\vec{v}$, $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$. En quel point de la trajectoire la vitesse est-elle maximale ? Minimale ?

Rep : 2) $\vec{v}=C\left(\frac{e\sin\theta}{p}\vec{u}_r+\frac{1+e\cos\theta}{p}\vec{u}_\theta\right)$ 3) $v^2=\frac{C^2}{p^2}(1+e^2+2e\cos\theta)$

7. Il était une fois le disque vinyle 33 tours ☺

Un « disque vinyle 33 tr », placé sur la platine d'un tourne-disque, effectue un mouvement de rotation uniforme à raison de 33 tours par minute. Calculer :

1) sa vitesse angulaire de rotation, sa période et sa fréquence.

2) la vitesse et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point M à la périphérie du disque (rayon R =15 cm).

<u>Rép:</u> 1) $\omega = 3{,}5\ rad.s^{-1}$; $f = 0{,}55$ Hz ; $T = 1{,}8$ s. 2) $v = 0{,}52\ m.s^{-1}$; $a_n = 1{,}8\ m.s^{-2}$; $a_t = 0$; $a = a_n$.

8. Grande roue ☺

1) Quel est le mouvement de chaque rayon d'une grande roue?

2) Quelle est le mouvement d'une nacelle?

3) Ces résultats resteraient-ils vrais si le moteur s'emballait et faisait tourner la roue 10 ou 20 fois plus vite?

9. Satellites d'observation de la Terre.☺

Les satellites d'observation évoluent dans le plan de l'équateur.

1. La période de rotation de la Terre (rayon R_T = 6380 km) autour de l'axe de ses pôles, dans le référentiel géocentrique, est de 86164 s. Calculer la valeur de la vitesse d'un point situé :

- Sur l'équateur
- À une latitude de 60 ° Nord
- À une latitude de 60 ° Sud.

2. **Le satellite géostationnaire Météosat**, assimilable à un point matériel, est situé à la distance de 42200 km du centre de la Terre. Ce satellite est fixe dans un référentiel terrestre.

a. Décrire son mouvement dans le référentiel géocentrique.

b. Déterminer sa vitesse angulaire ω dans le référentiel géocentrique.

c. Calculer sa vitesse dans le référentiel géocentrique.

3. **Le satellite Spot II** décrit une trajectoire circulaire à une altitude de 830 km, à la vitesse constante de 7550 $m.s^{-1}$ dans le référentiel géocentrique. Calculer sa période de rotation. Ce satellite est-il géostationnaire ?