

# L'interaction gravitationnelle

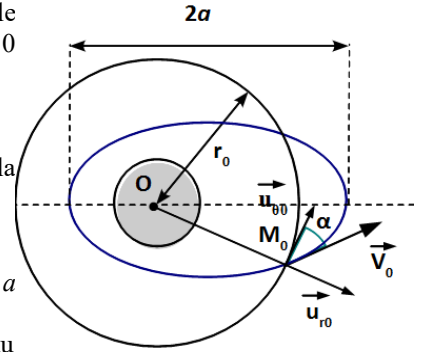
## 1. Masse d'un astre ☺

Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite circulaire autour de la lune à une distance de 2040 km du centre de celle-ci, avait une période de 8240 s dans le référentiel Sélénocentrique. Calculer la masse de la Lune.

Données :  $G=6,67 \cdot 10^{-11}$  SI

## 2. Lancement raté ☹☹

On désire effectuer le lancement d'un satellite de masse  $m_s$  de façon à avoir une orbite circulaire. On suppose que le lancement du satellite est manqué et qu'au point d'injection sur orbite  $M_0$  le vecteur vitesse a bien même module  $V_0$  que pour l'orbite circulaire de rayon  $r_0$  mais fait un angle  $0 < \alpha < \pi/2$  avec la direction prévue. On notera  $r_0$  la distance  $OM_0$ .



Le dispositif est représenté ci-contre.

1) Montrer que  $V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$  où  $G$  est la constante de gravitation universelle, et  $M_T$  la masse de la terre.

2) Exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  du satellite en fonction de  $m_s, G, M_T$  et  $r_0$ .

La trajectoire du satellite est nécessairement elliptique, pourquoi ? En déduire le demi grand axe  $a$  de l'ellipse.

3) Montrer grâce aux conditions initiales que la constante des aires caractérisant le mouvement du satellite est :  $C=r_0 V_0 \cos \alpha$ .

4) Montrer qu'au périhélie et à l'apogée  $E_m = \frac{1}{2} m_s \frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_T m_s}{r}$   $r$  étant la distance au centre  $O$  du périhélie ou de l'apogée.

5) Déduire de la question précédente les distances  $r_p$  et  $r_A$  au centre  $O$  de la terre du périhélie et de l'apogée de la trajectoire en fonction de  $r_0$  et  $\alpha$ . Rep :  $r_p = r_0(1 - \sin \alpha)$ ,  $r_A = r_0(1 + \sin \alpha)$

6) Déduire de la question précédentes les vitesses  $V_A$  et  $V_P$  à l'apogée et au périhélie.

## 3. Trajectoire d'une comète ☺☺

On rappelle que la terre décrit autour du soleil une orbite quasi-circulaire de rayon  $R_0 = 150$  millions de km en  $T_0 = 365,25$  jours.

1) Exprimer la vitesse  $V_0$  de la terre en fonction des données.

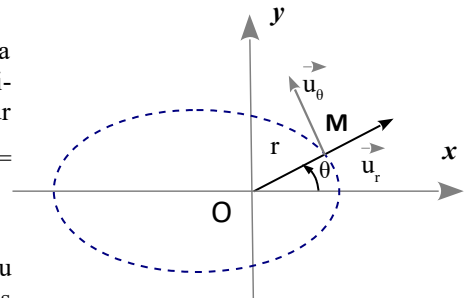
2) Une comète dont la trajectoire est coplanaire à l'orbite de la terre a une masse  $m_c$ . Son périhélie (point de sa trajectoire le plus proche du soleil) se trouve à la distance  $R_0/2$  du soleil et la vitesse de la comète en ce point est  $2V_0$ .

a) Grâce aux caractéristiques cinématiques de la comète au périhélie, montrer que son énergie mécanique est nulle, en déduire la nature de sa trajectoire.

b) Exprimer la vitesse  $v$  de la comète en fonction de sa distance  $r$  au centre du soleil. Rep :  $v = V_0(2R_0/r)^{1/2}$

## 4. Mise en orbite géostationnaire ☺☺

Un satellite terrestre décrit une trajectoire elliptique dans le plan équatorial. On repère sa position grâce au point  $M$  de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . La trajectoire est représentée ci-contre. Le point  $O$  est le centre de la terre. En utilisant les coordonnées polaires définies sur



le schéma, la trajectoire a pour équation :  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  avec  $e = 0,72$  l'excentricité et  $p =$

11800 km le paramètre de l'ellipse.

1) Positionner l'apogée et le périhélie sur le schéma.

2) En utilisant l'équation de la trajectoire, exprimer les rayons  $r_A$  et  $r_p$  de l'apogée et du périhélie du satellite en fonction de  $p$  et  $e$ . Faire les applications numériques et calculer les altitudes correspondantes.

3) Montrer que la vitesse à l'apogée  $V_A$  peut se mettre sous la forme :  $V_A = \sqrt{\frac{2GM_T r_p}{r_A(r_A + r_p)}}$ . En déduire l'expression  $V_P$  de la vitesse au

périhélie en fonction des mêmes paramètres. Faire l'AN. Quelle caractéristique principale a chacune de ces deux vitesses ?

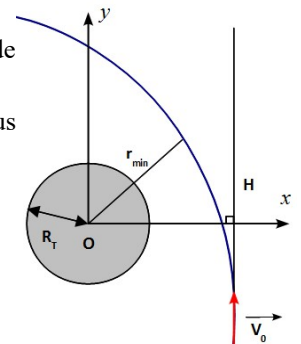
4) Quelle variation de vitesse faut-il communiquer à l'apogée pour rendre le satellite géostationnaire ?

Données : la masse de la Terre :  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg, la constante de gravitation  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  SI, le rayon de la Terre  $R = 6400$  km.

## 5. Distance de plus courte approche ☺☺☺

Un météore, point matériel  $M$  de masse  $m$  négligeable devant la masse  $M_T$  de la Terre, de centre  $O$ , arrive de l'infini avec la vitesse  $v_0$  par rapport à la Terre.  $M$  décrit une branche d'hyperbole de foyer  $O$ . Son paramètre d'impact est  $OH = b$  (voir la figure). Calculer sa distance  $r_{min}$  de plus courte approche de la Terre, en fonction de  $v_0, b, M_T, G$  constante de gravitation et  $R_T$  rayon de la Terre.

Rep :  $r_{min} = -GM_T/v_0^2 + [(GM_T/v_0^2)^2 + b^2]^{1/2}$



## 6. Énergie de mise sur orbite d'un satellite terrestre ☺☺

Un satellite terrestre de masse  $m$  est lancé d'une base  $M_0$  située à la latitude  $\lambda$ . Quelle énergie  $\Delta E$  faut-il lui fournir pour le placer sur une orbite circulaire de rayon  $r$  ? On exprimera  $\Delta E$  en fonction de  $m, \lambda, g_0$

intensité du champ de pesanteur au sol,  $R_T$  rayon terrestre et  $\omega_T$  vitesse de rotation de la Terre dans le

référentiel géocentrique. Commentez l'expression obtenue. Rep :  $\Delta E = E_2 - E_1 = m [g_0 R_T (1 - R_T/2r) - (\omega_T^2 R_T^2 \cos^2 \lambda)/2]$