

Exercice 1 :

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. La première équation n'est pas homogène. Les deux autres sont des équations du type d'Alembert.

Exercice 2

Attention : dans cet exercice, ne pas confondre la masse linéique qui apparaît dans la relation donnant la célérité des ondes et la masse volumique fournie dans l'énoncé. Elles sont reliées par : $\mu = \frac{m}{l} = \frac{\rho.V}{l} = \frac{\rho.S.l}{l} = \rho.S$ avec S la section de la corde.

$$\text{Ici } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{4T}{\pi d^2 \rho}} \quad \text{soit } \underline{c = 361 \text{ m.s}^{-1}}.$$

$$\text{Dans le mode fondamental } l = \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2l} \quad \text{soit } \underline{f_1 = 440 \text{ Hz}}.$$

On reconnaît le La musical (les données sont celles d'un piano demi-queue).

Exercice 3

$$\text{On écrit } \Delta L = \frac{FL}{ES} = \frac{MgL}{E\pi d^2/4} \quad \text{soit } \underline{\Delta L \approx 1,4 \text{ cm}} \quad (\text{et } \Delta L / L \approx 0,5 \%).$$

Exercice 4

a) On remarque que

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) =$$

$$\frac{A}{2} \cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi)$$

c'est-à-dire que la solution stationnaire est la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se déplaçant dans deux sens opposés.

b) De même

$$A \cos(\omega t - kx + \varphi) =$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + A \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx) =$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)$$

qui est bien la superposition de deux ondes stationnaires.

Exercice 5

1.

1. Onde harmonique progressive dans le sens des x croissants.
2. Onde harmonique progressive dans le sens des x décroissants.
3. Onde stationnaire (produit d'une fonction de x et d'une fonction de t).
4. À première vue, il s'agit de la superposition de deux ondes progressives harmoniques de sens de propagation opposés; cependant, comme elles ont même amplitude, on peut écrire

$$y = A[\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx)] = 2A \cos(\omega t) \cos(kx). \quad (8.2.1)$$

C'est donc une onde stationnaire.

5. On a la superposition de deux ondes progressives harmoniques de sens de propagation opposés. Leurs amplitudes n'étant pas égales (en valeur absolue), cette expression ne peut se simplifier en onde stationnaire. L'onde considérée n'est donc ni stationnaire ni progressive.

2. Les conditions aux limites sont $y(0,t) = y(L,t) = 0, \forall t$. Elles ne peuvent être vérifiées que par une onde stationnaire (présence de deux nœuds de vibration). Seules les solutions 3 et 4 peuvent donc *a priori* convenir.

On considère la solution 4. D'après l'équation (8.2.1), la condition $y(0,t) = 0$ s'écrit $A \cos(\omega t) = 0, \forall t$, d'où $A = 0$. Par conséquent, $y(x,t) = 0, \forall x, t$: la corde est toujours au repos, ce qui est exclu ici.

La solution 3 donne d'une part $y(0,t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]C = 0$, d'où $C = 0$; d'autre part, $y(L,t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]D \sin(kL) = 0$. On a donc soit $D = 0$, ce qui entraîne $y(x,t) = 0$, qui est exclu, soit $\sin(kL) = 0$, qui conduit à $kL = n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (le cas $n = 0$ n'est pas pertinent). De la relation de dispersion $\omega = kc$, on déduit

$$\omega_n = n \frac{c\pi}{L}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* .$$

3. D'après la question précédente, $y(x,t) = D[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \sin(kx)$. La condition initiale s'écrit

$$y(x,0) = 0 = AD \sin(kx), \forall x .$$

On a donc soit $D = 0$, soit $A = 0$. Le premier cas est exclu car il conduirait à $y(x,t) = 0$. Par conséquent, $A = 0$, ce qui donne $y(x,t) = DB \sin(\omega t) \sin(kx)$. L'amplitude de la solution étant $Y = DB$, la solution de l'équation différentielle est donc

$$y(x,t) = Y \sin(\omega t) \sin(kx), \text{ avec } k_n = n \frac{\pi}{L} \text{ et } \omega_n = n \frac{c\pi}{L} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} .$$

Par exemple, le mode $n = 3$ est représenté sur la figure 8.2.1. La forme de la corde est contenue dans une enveloppe d'équation $y_{\text{env}} = \pm Y \sin(kx)$ qui délimite des fuseaux de longueur $\lambda/2$.

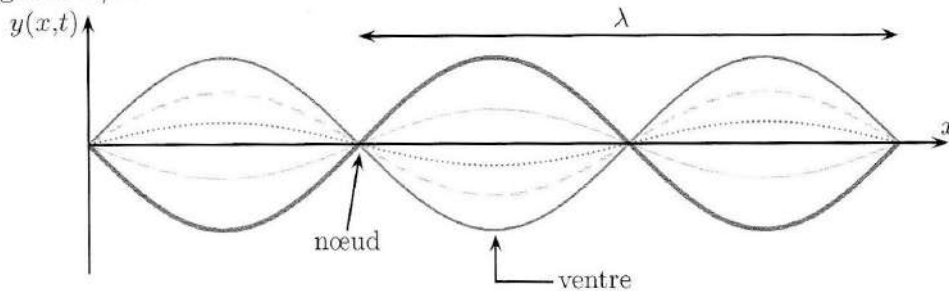


FIG. 8.2.1. Onde stationnaire représentée à différents instants.

4. L'observation de 4 nœuds de déplacement (en plus des 2 nœuds des extrémités) correspond à 5 fuseaux. La longueur d'un fuseau étant $\lambda/2$, la longueur de la corde

est $L = \frac{5}{2}\lambda$. Comme $\lambda = \frac{c}{f}$, où f est la fréquence, on en déduit, compte tenu de l'expression de la célérité c ,

$$L = \frac{5}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \Rightarrow \mu = \frac{25T_0}{4L^2 f^2} = \frac{25 \times 10}{4 \times 2^2 \times 10^2} = 0,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

La corde a pour masse linéique $\mu = 160 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice 6

a) La loi de Hooke indique que pour porter de l_0 à $l_0 + \delta l$ la longueur d'une tige de section S , il faut exercer sur son extrémité une force $F = ES\delta l / l_0$.

La tranche d'épaisseur dx comprise au repos entre x et $x+dx$ se trouve à l'instant t entre les sections d'abscisses $x + \xi(x,t)$ et $x+dx + \xi(x+dx,t)$; la

variation de son épaisseur ou allongement est donc $\xi(x+dx,t) - \xi(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$

au premier ordre en dx ($\ll \lambda$), d'où son allongement relatif (l'équivalent de $\delta l / l_0$): $\frac{\xi(x+dx,t) - \xi(x,t)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$.

La force exercée par la partie de droite sur la partie de gauche s'écrit alors :

$$F(x,t) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1)$$

b) Il s'exerce sur la tranche la force $F(x+dx,t)$ sur sa face de droite, et par action et réaction la force $-F(x,t)$ sur sa face de gauche; en effet, avec $|\xi| \ll dx$ (petits mouvements) ces forces peuvent être évaluées dans la position de repos. La RFD appliquée à la tranche de masse $\rho S dx$ conservée au cours du mouvement) et projetée sur Ox donne :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x+dx,t) - F(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad \text{d'après (1)}$$

d'où l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec la célérité} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

AN : pour l'acier, $c = 5,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, qui est l'ordre de grandeur attendu de la vitesse des ondes sonores dans les solides durs.

c) Les ondes se propagent dans un espace limité (la lame est de longueur L), il s'agit donc de chercher des solutions en ondes stationnaires obtenues par superposition d'ondes progressives se propageant dans les deux sens. La recherche d'une solution sous la forme $\xi(x,t) = f(x) \cdot g(t)$ conduit comme à la question 21. à $f(x) = f_0 \cos(kx + \varphi)$ et $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \psi)$ avec $k = \omega / c$.

d) Les deux extrémités de la lame étant libres, il ne s'y exerce aucune force.

En $x = 0$ et $x = L$ il faut donc traduire $F(x,t) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \forall t$

d'où $f'(x=0) = f'(x=L) = 0$ soit $\sin \varphi = 0$ et $\sin(kL + \varphi) = 0$

ce qui donne pour k les valeurs possibles : $k_n = \frac{n\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Les fréquences propres f_n de la lame sont alors :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} \Rightarrow f_n = n \frac{c}{2L}$$

La lame produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, des sons de hauteurs déterminées.

Rq : Il ne faut pas commettre ici l'erreur de traduire $\xi(x,t) = 0$ en $x=0$ et $x=L$; en effet, l'absence de force aux extrémités ne conduit pas à une immobilité (nœuds de position), bien au contraire les extrémités étant libres il y correspond des ventres de vibrations...

e) Pour une lame en acier de cette longueur les fréquences propres sont :

$$f_n = n 10,3 \text{ kHz (correspondant à un instrument très aigu)}$$

La fréquence de 785 Hz est donc bien trop faible pour résulter d'une excitation longitudinale. En réalité la lame n'est pas frappée avec un maillet (ou une baguette) sur la tranche à son extrémité (ondes longitudinales) mais sur le dessus provoquant des ondes transversales de flexion dont les fréquences propres sont données par une autre formule que la précédente...

Exercice 7

1. La loi des mailles s'écrit :

$$u(x,t) = \lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + u(x+dx,t).$$

La loi des noeuds donne :

$$i(x,t) = \gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t) + i(x+dx,t).$$

Au premier ordre en dx , ces deux équations s'écrivent :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t), \\ -\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t). \end{cases}$$

On les découple en dérivant la première par rapport à t et la deuxième par rapport à x . L'équation vérifiée par $i(x,t)$ est :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{\lambda \gamma} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t).$$

La tension $u(x,t)$ vérifie la même équation.

$$2. c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}}.$$

3. On cherche l'onde de courant sous la forme $i(x,t) = I_0 \cos(\omega t - kx)$. L'onde de tension s'en déduit par une des deux équations de couplage, par exemple $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$, d'où $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \lambda \omega I_0 \cos(\omega t - kx)$. On en déduit :

$$u(x,t) = c\lambda I_0 \cos(\omega t - kx) + f(t),$$

la fonction $f(t)$ est choisie nulle puisqu'elle ne correspond pas à une onde. D'où :

$$u(x,t) = Z_C i(x,t) \quad \text{où} \quad Z_C = c\lambda = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}.$$

Si l'onde se propage dans l'autre sens ($i(x,t) = I_0 \cos(\omega t + kx)$), on obtient $u(x,t) = -Z_C i(x,t)$.

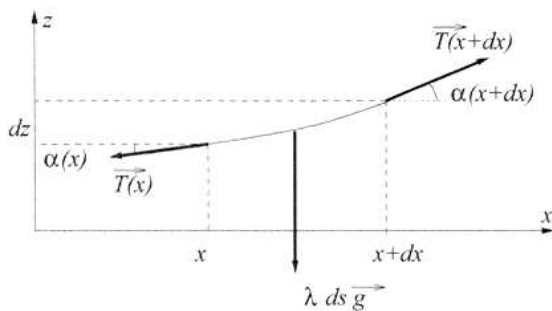
AN : $Z_C = 51,1 \Omega$

4. On étudie la propagation d'ondes électriques dans un câble, on se place donc en dehors du cadre de l'ARQS. Les lois de l'électrocinétique ne sont pas valables à l'échelle du câble en entier, mais le restent sur une petite portion.

Problème n°1

- Hypothèses qui ne sont plus valables : poids négligé ; angles petits. Hypothèse à rajouter : poids exercé sur chaque portion infinitésimale de câble.
- et 3. Voir correction d'un exercice de type plus guidé ci-dessous.

a) Voici l'allure de la figure.



b) D'après Pythagore, $ds^2 = dx^2 + dz^2$ donc

$$ds^2 = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

Par définition de la dérivée, $\tan \alpha = \frac{dz}{dx}$.

c) L'équilibre du tronçon de corde, de masse λds , s'écrit

$$\vec{T}(x+dx) + \vec{T}(x) + \lambda ds \vec{g} = \vec{0}$$

On projette sur les deux axes :

$$\begin{cases} -T(x) \cos \alpha(x) + T(x+dx) \cos \alpha(x+dx) = 0 \\ -T(x) \sin \alpha(x) + T(x+dx) \sin \alpha(x+dx) - \lambda g ds = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit} \begin{cases} \frac{\partial [T(x) \cos \alpha(x)]}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial [T(x) \sin \alpha(x)]}{\partial x} = \lambda g \frac{ds}{dx} \end{cases}$$

On en déduit :

i) $T(x) \cos \alpha(x) = T_0$ est une constante donc

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos \alpha(x)}$$

ii) donc $\frac{\partial [T_0 \tan \alpha(x)]}{\partial x} = \lambda g \frac{ds}{dx}$.

d) D'après l'expression de ds , on a

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

et en remplaçant $\tan \alpha$, on en déduit l'équation différentielle

$$T_0 \frac{d^2 z}{dx^2} = \lambda g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

e) En posant $u = \frac{dz}{dx}$, on obtient l'équation

$$T_0 \frac{du}{dx} = \lambda g \sqrt{1 + u^2} \quad \text{soit} \quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda g}{T_0} dx$$

f) En intégrant cette équation à variables séparables, on en déduit $\operatorname{argsh} u = \frac{\lambda g}{T_0} x + K$ donc $u = \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda g}{T_0} x + K \right)$ d'où

$$z = \frac{T_0}{\lambda g} \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda g}{T_0} x + K \right) + K'$$

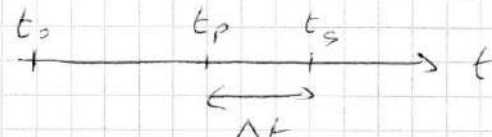
Les deux conditions aux limites sont les positions des deux points d'attache de la corde.

Problème n°2

On note :

- * t_0 la date de rupture des roches au niveau du foyer
- * t_p la date de détection des ondes P par une station sismique
- * t_s " " " " " " " " " " " "
- " " " " " " " " " " " "

D'après l'énoncé :



$t_p < t_s$

Si l'on suppose les célérités v_p et v_s constantes, et si on note d la distance entre le foyer et la station sismique :

$$v_s = \frac{d}{t_s - t_0} \quad \text{et} \quad v_p = \frac{d}{t_p - t_0}$$

Mais on n'a pas accès à t_0 , il faut l'éliminer :

$$(1) \quad t_s - t_0 = \frac{d}{v_s} \quad \text{et} \quad t_p - t_0 = \frac{d}{v_p} \quad (2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{donne} : \quad t_s - t_p = \frac{d}{v_s} - \frac{d}{v_p}$$

$$\text{D'où} \quad d = \frac{t_s - t_p}{\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p}} \quad \text{ou encore}$$

$$d = \frac{\Delta t}{\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_p}}$$

Si l'on connaît v_p et v_s , la mesure de Δt permet de calculer d .

Avec 1 seule station sismique, on ne peut positionner le foyer que sur une sphère ($d = d_0$)

Avec 2 stations, on a l'intersection de 2 sphères, soit un cercle \rightarrow toujours insuffisant.

Avec 3 stations, ce sera l'intersection de 3 sphères, soit deux points, mais dont 1 seul se situe sous terre. C'est donc suffisant en théorie.