Exercice 1 : Questions de cours
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Établir l'équation de propagation des ondes transversales sur une corde (préciser les hypothèses et les approximations).
2. Établir l'équation de propagation des ondes longitudinales dans une tige solide (préciser les hypothèses et les approximations). Remarque : une démonstration plus directe que celle du cours pourra être trouvée dans l'exercice 6.
3. On note c une célérité. Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des équations du type équation de d'Alembert ?

$$\text{(a) } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{(b) } c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{(c) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Exercice 2 : Piano demi-queue
Calculer la célérité c des ondes sur une corde d'acier de masse volumique $\rho = 7,8.10^3$ kg.m^{-3}, de diamètre $d = 1,0$ mm, tendue par une tension $T = 800$ N. Si la longueur de la corde est $l = 41$ cm ; quelle est la fréquence propre la plus basse émise ? Quelle note musicale reconnaît-on ?

Exercice 3 : Allongement d'un fil d'acier
Quel est l'allongement ΔL d'un fil d'acier de diamètre $d = 2,5$ mm et de longueur $L = 3,0$ m supportant en traction une masse M de 500 kg, schant que le module d'élasticité E de l'acier vaut 201 GPa ?

Exercice 4 : Décomposition réciproque des solutions harmoniques progressive et stationnaire
On rappelle les relations trigonométriques :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \cos(p+q) + \cos(p-q) = 2\cos p \cos q.$$

1. Justifier qu'une solution stationnaire harmonique est la somme de deux solutions progressives harmoniques de l'équation de d'Alembert.
2. Justifier qu'une solution progressive harmoniques est la somme de deux solutions stationnaires harmoniques de l'équation de d'Alembert.

Exercice 5 : Différents types de vibrations sur une corde
On applique une tension T sur une corde de longueur L, et de masse linéique μ. L'équation de propagation des mouvements transversaux de la corde est du type équation de d'Alembert.

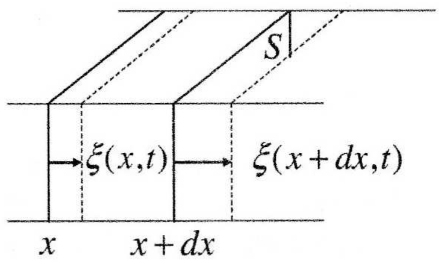
1. On propose différentes solutions de cette équation :
   1. $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$;
   2. $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$;
   3. $y(x,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)(C\cos kx + D\sin kx)$;
   4. $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx) + A\cos(\omega t - kx)$;
   5. $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx) + B\cos(\omega t - kx)$ avec $|A| \neq |B|$.

Donner la signification de chaque solution.

2. La corde est fixée à ses deux extrémités. Parmi les solutions proposées, quelle est celle qui convient ? En déduire la contrainte qui existe sur ω.
3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ la corde est plate (pas de perturbation) ; la solution est d'amplitude Y. Donner l'expression complète de la solution dans ce cas.
4. La tension exercée sur la corde est de 10 N. La corde mesure $2,0$ m et est fixée par ses extrémités. Lorsque celle-ci est excitée à une fréquence de 10 Hz, on observe 4 nœuds de déplacement en dehors des extrémités. Déterminer la masse linéique de la corde.

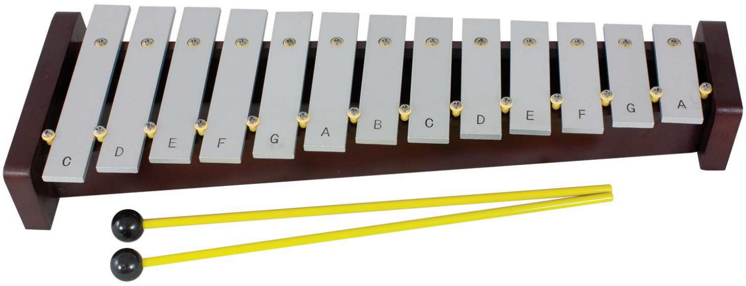
Exercice 6 : Fréquences propres d'une lame frappée

Une lame parallélépipédique de longueur L suivant Ox possède une section d'aire S dans le plan yOz. La matière située dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation longitudinale. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + \xi(x,t)$ et est soumise, de la part de la matière située à sa droite, à une force $\overrightarrow{F} = F(x,t)\overrightarrow{u_x}$. La masse volumique et le module d'Young du matériau sont notés ρ et E.



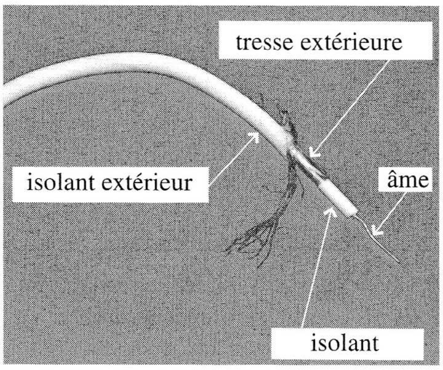
Pour résoudre cet exercice, on ne cherchera pas à faire une modélisation, au niveau microscopique, des interactions entre atomes.

1. Rappeler la loi de Hooke et exprimer $F(x,t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $\xi(x,t)$ et des données.
2. Montrer que $\xi(x,t)$ obéit à une équation de d'Alembert et exprimer la célérité c des ondes longitudinales. Application numérique sachant que la lame est en acier pour lequel $\rho = 7,8.10^3$ kg.m^{-3} et $E = 19,5.10^{10}$ Pa.
3. Quelle type de solutions sinosoïdales (de pulsation ω et de nombre d'onde k) convient-il de chercher pour $\xi(x,t)$?
4. Les deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$ de la lame n'étant soumises à aucune force, montrer que seules certaines valeurs particulières, indexées par un entier n, sont accessibles à k. Exprimer les fréquences propres f_n de la lame.
5. Le glockenspiel est un instrument de musique à percussion, composé de lames de métal mises en vibration à l'aide d'un maillet (voir photographie ci-après). Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 24,3$ cm émet un son de fréquence égale à 785 Hz. Peut-il résulter de l'excitation d'une onde longitudinale ? Commenter.

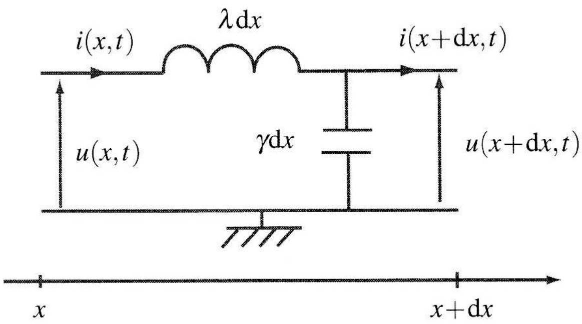


Exercice 7 : Câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont couramment utilisés dans la vie de tous les jours. Leur structure est précisée sur la photographie ci-dessous. L'âme est un cylindre conducteur (en cuivre), le conducteur extérieur est constitué d'une tresse de fils de cuivre très fins, ces deux conducteurs étant séparés par un isolant. La tresse extérieure est reliée à la masse du réseau et l'âme « reçoit » le signal.



Si les conducteurs et l'isolant sont parfaits, il n'y aucune dissipation d'énergie. Un tronçon de câble compris entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ peut alors être modélisé par le schéma de la figure suivante. Dans ce modèle, le câble possède une inductance $\lambda \mathrm{d}x$ et une capacité $\gamma \mathrm{d}x$: λ et γ sont donc respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble.



On suppose $\mathrm{d}x$ petit devant la distance caractéristique de variation de $u(x,t)$ et $i(x,t)$ de telle sorte que l'on puisse appliquer les lois des mailles et les lois des nœuds sur la portion de câble représentée sur la figure.

1. Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par $i(x,t)$ et par $u(x,t)$.

2. Quelle est la célérité c des ondes dans le câble ?
3. On cherche $i(x,t)$ sous la forme d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x positifs. En déduire l'expression de $u(x,t)$ en fonction de $i(x,t)$ et de la grandeur $Z_C = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$, appelée impédance caractéristique du câble. Faire l'application numérique avec $\lambda = 241 \pm$ nH.m^{-1} et $\gamma = 92,4 \pm$ pF.m^{-1}
4. Pourquoi dans cet exercice n'a-t-on pas appliqué les lois de l'électrocinétique à l'ensemble du câble, mais seulement à une petite portion ?

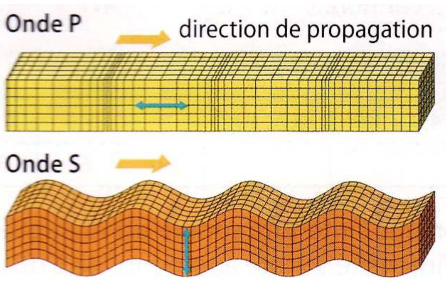
Problème n°1 : Équation de la chaînette

On considère une câble inextensible de masse linéique λ accrochée à ses deux extrémités et parfaitement immobile. Cela peut être par exemple un câble électrique entre deux pylônes (voir image ci-dessous).

1. Par rapport à la modélisation du cours, quelles sont les hypothèses qui ne sont plus valables a priori ? Quelles sont celles que l'on doit rajouter ?
2. Mettre en équation cette situation.
3. $(**)$ Montrer que le profil du câble est de type cosinus hyperbolique.

Problème n°2 : Ondes sismiques

En sismologie, on distingue les ondes P (ou ondes primaires) qui sont des ondes de compression-dilatation, et les ondes S (ou ondes secondaires) qui sont des ondes de cisaillement (voir figure ci-dessous). Les deux se propagent en volume, tandis que d'autres types d'ondes se propagent en surface. Les ondes P ont une célérité plus élevée que les ondes S, et sont détectées en premier lors d'un séisme. Pour simplifier le raisonnement, on pourra considérer les célérités constantes et connues. On appelle *foyer* d'un séisme le lieu de la rupture des roches en profondeur ; et *épicentre* la projection du foyer sur la surface terrestre.



Proposer une méthode permettant de déterminer la distance du foyer d'un séisme à une station sismique. Combien faut-il de stations pour pouvoir localiser précisément le foyer dans l'espace à trois dimensions ?