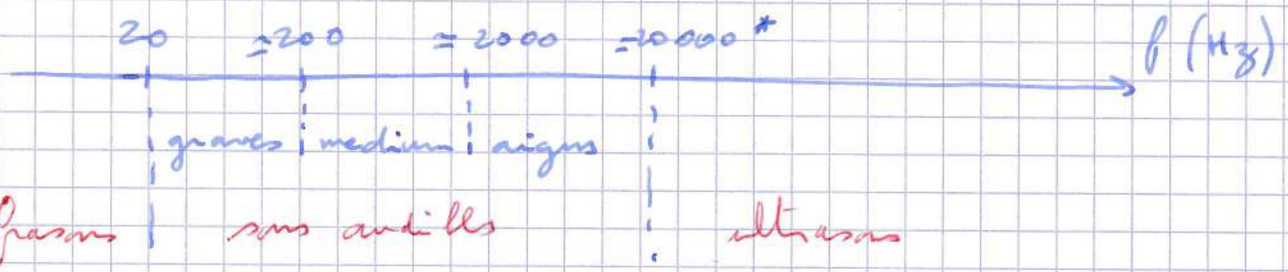
Od 2

Ondes acoustiques dans les fluides

Rappels : - domaines des ondes acoustiques



* variable d'un individu à l'autre ; en réalité plutôt compris entre 15 et 18 kHz.

- nécessité d'un milieu matériel pour se propager : solide, liquide ou gazeux

fluide (ce chapitre)

Problématique : En première approximation, comment peut-on décrire une onde sonore ? Par quelle équation ?

I/ Mise en équation des ondes acoustiques

- Domaines mis en jeu : méca. des fluides et thermodynamique
- Demander quelles grandeurs varient au passage d'une onde sonore

1) Hypothèses ; approximation acoustique

Réf. : labo (galiléen) ; Repère : cartésien $(Oxyz)$

① On néglige tout effet dissipatif, càd qu'on suppose un écoulement parfait pour le fluide. On a montré ds ce cas que les particules de fluides évoluaient de façon adiabatique et réversible, ce qui implique une évolution isentropique.

② Les forces de pesanteur st négligées : seules les forces de pression s'exercent sur les particules de fluide.

③ Au repos, le fluide est caractérisé par (description eulérienne) :

- un champ de pression uniforme : $p(M,t) = p_0$
- " " " masse volumique uniforme : $\mu(M,t) = \mu_0$
- un champ de vitesse nul en tt pt $\vec{v}(M,t) = \vec{v}_0 = \vec{0}$

L'onde sonore est alors décrite comme une perturbation de cet état de repos :

$$\begin{cases} p(M,t) = p_0 + p_1(M,t) \\ \mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t) \\ \vec{v}(M,t) = \vec{v}_1(M,t) \end{cases}$$

(p_1 est appelée "surpression")

où les grandeurs portant l'indice 1 ont en tt pt du fluide une valeur temporelle nulle.

L'approximation acoustique consiste à mener tous les calculs à l'ordre 1 par rapport aux perturbations, considérées comme des infiniments petits du 1er ordre, (tt cô leurs dérivées)

Cela permettra d'obtenir des équations linéaires.

2) Linéarisation de l'équation d'Euler

Forme générale : $\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{grad})\vec{v}\right] = -\vec{grad}(p) + \vec{f}$

Ici $\vec{f} = \vec{0}$ et l'équation s'écrit :

$$(\mu_0 + \mu_1)\left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}_1 \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v}_1}_{\text{ordre } 2}\right] = -\vec{\text{grad}}(p_0 + p_1)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \underbrace{\mu_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}}_{\text{ordre } 2} = \underbrace{-\vec{\text{grad}}(p_0)}_{=\vec{0}} - \vec{\text{grad}}(p_1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Equation d'Euler linéarisée :}\\ \mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}(p_1)\end{array}}$$ (*)

Savoir retrouver

3) Linéarisation de l'équation locale de conservation de la masse

Forme générale : $\text{div}(\mu \cdot \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$

D'où : $\text{div}\left[(\mu_0 + \mu_1) \cdot \vec{v}_1\right] + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 + \mu_1) = 0$

$$\text{div}(\mu_0 \cdot \vec{v}_1) + \underbrace{\text{div}(\mu_1 \cdot \vec{v}_1)}_{\text{ordre } 2} + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Equation de conservation de la masse linéarisée :}\\ \mu_0 \,\text{div}(\vec{v}_1) + \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0\end{array}}$$ (**)

Savoir retrouver

On remarque $\text{div}(\vec{v}_1) \neq 0$, donc l'écoulement n'est pas incompressible (revoir MF1), ce qui paraît logique pour la propagation d'ondes sonores.

4) Évolution thermodynamique

Pour l'instant : 3 chps inconnus et 2 équations. Il en faut une autre, de type équation d'état thermodynamique, pour quantifier la "compressibilité" de l'écoulement.

Déf : on appelle coefficient de compressibilité isentropique la grandeur :

$$\underbrace{\chi_s}_{Pa^{-1}} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s$$

Com : * χ_s quantifie la variation relative de la masse volumique d'un fluide lorsqu'on varie sa pression, à entropie constante. Si $P \nearrow$, $\mu \nearrow$ et donc $\frac{\partial \mu}{\partial p} > 0$ et $\chi_s > 0$

* les valeurs de χ_s caractérisent le fluide et seront fournies.

Si l'on suit une particule de fluide (syst. fermé) au cours du tps, entre t et $t+dt$,

$$\chi_s = \frac{1}{\mu}\frac{D\mu}{Dp} \quad \text{soit} \quad D\mu = \mu . \chi_s Dp$$

ou encore $$\frac{D\mu}{Dt} = \mu \chi_s \frac{Dp}{Dt}$$

$$\frac{D\mu_1}{Dt} = (\mu_0 + \mu_1) . \chi_s \frac{Dp_1}{Dt} = \mu_0 \chi_s \frac{Dp_1}{Dt}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}_1 . \vec{\text{grad}})\mu_1}_{\text{ordre 2}} = \mu_0 \chi_s \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}_1 . \vec{\text{grad}}) p_1}_{\text{ordre 2}} \right]$$

Equation linéarisée décrivant l'évolution thermodynamique :

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \cdot \chi_s \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t}}$$ ${}^{*}_{**}$

Savoir retrouver

Com : localement, autour du pt M ds le fluide, les variations temporelles de masse volumique sont proportionnelles aux variations de pression.

car $\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial p}{\partial t}$

$(\mu = \mu_0 + \mu_1)$ $(p = p_0 + p_1)$

5) Equation de propagation de la surpression

Au final : $\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_1) & * \\ \mu_0 \, \text{div}(\vec{v}_1) + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0 & ** \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_s \cdot \frac{\partial p_1}{\partial t} & {}^{*}_{**} \end{cases}$

** et ${}^{*}_{**}$ donnent : $\text{div}(\vec{v}_1) = -\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}$

Prenons la divergence de * :

$\text{div}\left(\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right) = \text{div}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}(p_1)\right)$

th de Schwarz ↳ $\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}(\vec{v}_1)\right) = -\Delta p_1$

$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}\right) = -\Delta p_1$

$$\Delta p_1 - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

Savoir retrouver

La surpression vérifie une équation de d'Alembert à 3 dimensions :

$$\boxed{\Delta p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 . \chi_s}}}$$

Rq : - démonstration à 3D à savoir faire (conseillé) mais exigible seulement à 1D (exercice) en posant $p_1 = p_1(x,t)$; $\mu_1 = \mu_1(x,t)$ et $\vec{v}_1 = \vec{v}_1(x,t)$ qui donnent 3 équations scalaires (en projet° sur $\vec{u}_x$)
- rappel : en coord. cart : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
- on pourrait de m̂ montrer (H.P) que les chps μ_1 et $\vec{v}_1$ satisfont le m̂ type d'EA à 3D.

6) Célérité des ondes sonores

ⓐ Analyse qualitative

fluide "rigide" / "raide" $\Leftrightarrow$ peu compressible $\Leftrightarrow \chi_s$ petit
$\Leftrightarrow \chi_s^{-1}$ grand.

D'où, encore dans ce cas :

$$c = \sqrt{\frac{\chi_s^{-1}}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\text{terme de "raideur" du milieu}}{\text{terme "d'inertie" du milieu}}}$$

En pratique, c'est le terme χ_s^{-1} qui est prépondérant : "c" est d'autant plus grande que le milieu est peu compressible $\Leftrightarrow$ rigide.

Soit : $\left(c_{solide} > c_{liquide} > c_{gaz} \right.$

Ex : $\left(\begin{array}{ccc} 4,0.10^3 \, m.s^{-1} & 1,4.10^3 \, m.s^{-1} & 3,4.10^2 \, m.s^{-1} \\ (\text{acier}) & (\text{eau}) & (\text{air}) \end{array} \right)$

① Cas d'un gaz parfait

Syst fermé de G.P. de masse m évoluant de manière adiabatique réversible. Loi de Laplace :

$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ $PV^\gamma = cte$ donne $\left(\mu = \frac{m}{V}\right)$: $\frac{P}{\mu^\gamma} = cte'$

soit $\mu = A . P^{1/\gamma}$.

D'où $\chi_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{A P^{1/\gamma}} . \frac{1}{\gamma} . A . P^{1/\gamma - 1}$

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P} \simeq \frac{1}{\gamma P_0}$$

$\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P_0 + P_1} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{P_0} . \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{P_1}{P_0}}}_{\simeq 1}$

Donc $c = \sqrt{\frac{\chi_S^{-1}}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}$

Eq. d'état des GP : $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

donne $P_0 = \frac{\mu_0 R T}{M}$

Finalement $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}}$

A.N. : air ($M = 29{,}0$ g/mol) à $T = 293$ K ($= 20°C$), avec $\gamma = 1{,}40$ et $R = 8{,}314$ SI. On trouve :

$c = 343$ m/s .

demande de faire l'A.N.

II/ Etude des OPPH acoustiques

1) Intérêt et expression

Considérons une propagation unidimentionnelle selon (Ox). L'équation de propagation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

On a vu ds Od 1 que les OPPH du type $p_1(x,t) = P_1 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)$ en étaient solution, et que les solutions plus générales (OPH, ondes stationnaires) s'obtenaient par combinaison linéaire d'OPPH, d'où l'intérêt de ces dernières, et l'importance de leur étude.

Rappel : on peut aussi écrire :

$p_1(x,t) = P_1 \cos(\omega t \pm \vec{k}.x\vec{u_x} + \varphi)$

où $\vec{k} = k\vec{u_x}$ est le vecteur d'onde ($\|\vec{k}\|$ en m^{-1})

De manière plus générale, pour une OPPH se propageant dans la direction $\vec{n}$ on aura :

$p_1(x,t) = P_1 \cos(\omega t \pm \vec{k}.\vec{r} + \varphi)$

avec $\vec{k} = k\vec{n}$ et $\vec{r} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}$

(relire la fin du chap. 01)

2) Relation de dispersion

En complexe : $\underline{p_1} = \underline{P_1} e^{j\omega t} e^{-jkx}$ donne

$(-jk)^2 \underline{p_1} - \frac{1}{c^2} \times (j\omega)^2 \underline{p_1} = 0$

soit $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

* condition nécessaire pour qu'elles soient solutions

La relation de dispersion associée* aux solutions en OPPH s'écrit $k = \frac{\omega}{c}$, ce qui permet de réécrire le vecteur d'onde sous la forme :

$$\boxed{\vec{k} = k\vec{u_x} = \frac{\omega}{c}\vec{u_x} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u_x}}$$

3) Structure des OPPH

a) Structure

Propagation à 1D suivant $\vec{u_x}$.

Considérons l'éq. d'Euler linéarisée :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}(p_1) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}\vec{u_x}$$

et cherchons des solutions en OPPH :

$\underline{p_1} = P_1 e^{j(\omega t - kx)}$ (on fixe $\varphi = 0$)

$\underline{\vec{v_1}} = V_1 e^{j(\omega t - kx + \varphi)} \vec{u}$ ($\vec{v_1}$ éventuellement déphasée p. r. à $\underline{p_1}$, et $\vec{u}$ vecteur unitaire donnant sa direction). D'où :

$$\mu_0 j\omega \underline{\vec{v_1}} = -(-jk)\,\underline{p_1}\,\vec{u_x}$$

soit $\mu_0 \omega \vec{v_1} = k.\underline{p_1}\,\vec{u_x}$

La direction de $\vec{v_1}$ est selon $\vec{u_x}$, donc :

Les ondes acoustiques dans un fluide sont longitudinales

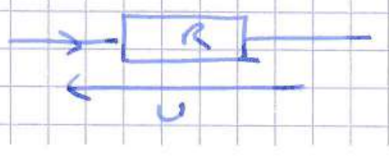
b) Notion d'impédance acoustique

On a donc, en projection sur (Ox) :

$\mu_0 \omega \underline{v_1} = k\underline{p_1} = \frac{\omega}{c}\underline{p_1}$, soit

$$\underline{p_1} = \mu_0 c\, \underline{v_1}$$

Analogie avec l'électrocinétique :



loi d'Ohm $\underbrace{I}_{\text{effet}} = \frac{\overbrace{U}^{\text{cause}}}{R}$