Soit $R = \frac{U}{I}$, on lien "impédance = $\frac{\text{cause}}{\text{effet}}$"

Déf : on appelle impédance acoustique d'un milieu la grandeur (a priori complexe) :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p_1}}{\underline{v_1}}$$

$\underline{Z}$ → $kg.m^{-2}.s^{-1}$; $\underline{p_1}$ → Pa ; $\underline{v_1}$ → $m.s^{-1}$

$[\underline{Z}] = Pa.m^{-1}.s = N.m^{-2}.m^{-1}.s$
$= kg.m.s^{-2}.m^{-2}.m^{-1}.s$
$[\underline{Z}] = kg.m^{-2}.s^{-1}$

⚠ ce n'est pas en Ω !!

savoir utiliser

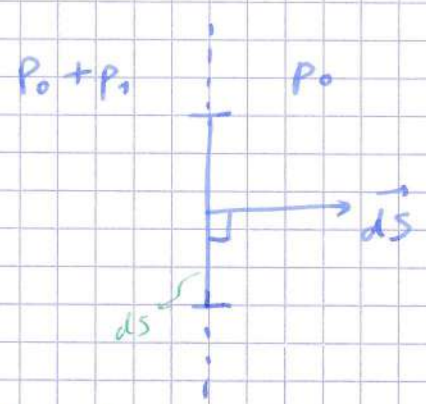
Propriété : pour une onde plane progressive harmonique (se propageant dans le sens de $\vec{u}_x$) :
$Z_{OPPH} = \mu_0 . c$
Pour une onde plane "régressive" harmonique (se propageant ds le sens de $-\vec{u}_x$)
$Z_{OPRH} = -\mu_0 c$

Con : * Z_{OPPH} et Z_{OPRH} st bien caractéristiques du milieu (via μ_0 et c). Autre écriture : $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$
* elles st réelles, donc les ondes de surpression et de vitesse vibrent en phase.
* l'impédance traduit le couplage entre les 2 chps.

III/ Aspects énergétiques

1) Puissance acoustique

On considère une surface élémentaire $\vec{dS}$ ds un fluide, amenée à se déplacer à la vitesse $\vec{v_1}$ au passage de l'onde acoustique :



La résultante des forces de pression sur dS s'écrit $d\vec{F} = (p_0+p_1).\vec{dS} - p_0\vec{dS} = p_1.\vec{dS}$
et la puissance associée : $d\mathcal{P} = d\vec{F}.\vec{v_1} = p_1 \vec{v_1} \vec{dS}$

savoir utiliser

Déf : on appelle vecteur densité de flux de puissance acoustique la grandeur :

$$\underbrace{\vec{\Pi}}_{W.m^{-2}} = \underbrace{p_1}_{Pa}.\underbrace{\vec{v_1}}_{m.s^{-1}}$$

Analogie : vecteur de Poynting ! $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Interprétation physique : la puissance reçue par une surface (S) orientée par $\vec{dS}$ s'écrit :

$$\mathcal{P} = \iint_{(S)} \vec{\Pi}.\vec{dS}$$

2) Equation locale de conservation de l'énergie

ⓐ Equation locale

Calculons $\text{div}(\vec{\Pi})$!

Formulaire :

$$\text{div}(p_1 \cdot \vec{v}_1) = p_1 \,\text{div}(\vec{v}_1) + \vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(p_1) \quad \text{Or}$$

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{v}_1) = \dfrac{-1}{\mu_0} \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} & (**) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(p_1) = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} & (*) \end{cases}$$

D'où

$$\text{div}(p_1 \cdot \vec{v}_1) = -\frac{1}{\mu_0} p_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial t} - \mu_0 \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$$

$$\xrightarrow{**} \; = -\frac{1}{\cancel{\mu_0}} p_1 \cdot \cancel{\mu_0} \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\chi_S p_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2\right]$$

savoir utiliser

Déf : on appelle densité volumique d'énergie acoustique la grandeur :

$$e = \underbrace{\frac{1}{2}\chi_S p_1^2}_{\text{densité d'énergie interne } u} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2}_{\text{densité d'énergie cinétique } e_c}$$

J.m^{-3}

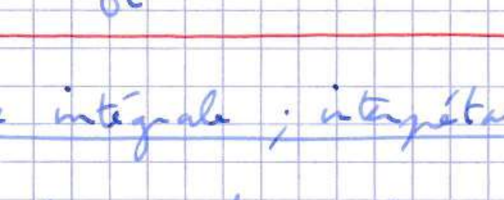
On a alors :

Équation locale de conservation de l'énergie :

$$\text{div}(\vec{\pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

② Forme intégrale ; interprétation physique

Exercice : en s'aidant du chap. EM4, mq :



$$\frac{d}{dt}\left[\iiint_{(V)} e \, d\tau\right] = -\iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS_{ext}}$$

variation temporelle de l'énergie acoustique contenue ds (V)

flux d'énergie acoustique entrant à travers (S) par unité de temps.

3) Expressions de $\vec{\Pi}$ et e ds le cas particulier d'une OPPH

Pour une OPPH on a $p_1 = \mu_0 c v_1$. On a alors :

* $e_c = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$
* $u = \frac{1}{2}\chi_s p_1^2 = \frac{1}{2}\chi_s \mu_0^2 c^2 v_1^2 = \frac{1}{2}\cancel{\chi_s}\mu_0^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\mu_0}\cancel{\chi_s}} v_1^2$

$u = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2$

Ds ce cas $\boxed{e_c = u}$

Prenons $\begin{cases} \vec{v}_1 = v_{1m}\cos(\omega t - kx)\,\vec{u} \\ p_1 = \mu_0 c\, v_1 = \underbrace{\mu_0 c v_{1m}}_{p_{1m}}\cos(\omega t - kx) \end{cases}$

D'où → Rappeler pourquoi on calcule des moy temporelle (cf optique)

$\langle e\rangle_t = \langle u + e_c\rangle_t = 2\langle e_c\rangle_t$

$\langle e\rangle = 2\left\langle \frac{1}{2}\mu_0 v_{1m}^2 \cos^2(\omega t - kx)\right\rangle_t$

$$\boxed{\langle e\rangle = \frac{1}{2}\mu_0 v_{1m}^2}$$

Rq : cela implique que l'énergie moyenne ds tt l'espace d'une OPPH est infinie. Ces ondes n'ont donc pas un caractère physique. Ce problème est réglé qd on en fait des combinaisons linéaires (à 3D).

On a aussi

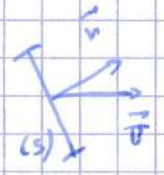
$$\langle \vec{\pi} \rangle = \langle p_1 \vec{v}_1 \rangle$$

$$= \langle \mu_0 c \, v_{1m}^2 \cos^2(\omega t - kx) \, \vec{u} \rangle$$

$$\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c \, v_{1m}^2 \, \vec{u}} = \frac{1}{2} p_{1m} v_{1m} \vec{u}$$

4) Intensité acoustique

Soit (S) une surface orientée par un vecteur normal $\vec{n}$



B

Déf: on appelle intensité acoustique (ou sonore) I la puissance acoustique surfacique moyenne transportée par l'onde acoustique. Si l'on cherche à l'exprimer suivant la direction $\vec{n}$:

$$\mathrm{W.m^{-2}} \leftarrow I = \underbrace{\langle \vec{\pi} \cdot \vec{n} \rangle_t}_{\to \ \mathrm{W\,m^{-2}}}$$

Mais l'oreille humaine peut détecter des sons dont l'intensité varie d'un facteur 10^{12} !!

B

Déf (plus adaptée) : on appelle niveau sonore, ou intensité sonore en décibels la grandeur :

$$L = I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I_0 est une intensité sonore de référence correspondant environ au seuil d'audibilité :

$$I_0 = 10^{-12} \ \mathrm{W.m^{-2}}$$

A.N : intensité I pour un niveau sonore de 90 dB ?

$$I = I_0 \cdot 10^{I_{dB}/10} = 10^{-12} \cdot 10^{9} = 10^{-3}\ W \cdot m^{-2}$$

Voir doc. 1 et 2

5) Ondes sphériques et décroissance en 1/r

ⓐ Expression du champ de surpression

On considère des ondes acoustiques sphériques créées par une source en O. On se place en coord. sph. Le Pb est invariant par rotation suivant les angles θ et φ. On cherche donc les chps sous la forme : $p_1 = p_1(r,t)$; $\mu_1 = \mu_1(r,t)$ et $\vec{v}_1 = \vec{v}_1(r,t)$.

$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2}$

É.A. pour la surpression :

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

Avec les chps ne dépendant que de r comme coord. spat :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r p_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (r p_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \cdot r \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 (r \cdot p_1)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r \cdot p_1)}{\partial t^2} = 0$$

Les solut° en OPH st donc du type :
↳ progressive

$$r \cdot p_1 = A_0 \cos(\omega t \pm k \cdot r) \quad \text{avec } \boxed{\omega = k \cdot c}$$

soit $\boxed{p_1 = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t \pm k r)}$

Ici ondes créées en O se propageant vers les r crois-sants, donc $p_1(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr)$.

Notation complexe : $\underline{p_1} = \frac{A_0}{r} e^{j(\omega t - kr)}$
avec $p_1 = Re(\underline{p_1})$.

Le chp de surpression décroit en $1/r$; il est nul qd $r \to +\infty$

(b) Expression du champ de vitesse

~~Par symétrie, on cherche $\vec{v_1}$ sous la forme :~~
~~$\vec{v_1} = \underline{v_1}\,\vec{u_r}$~~ inutile

Eq. d'Euler linéarisée : $\mu_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\vec{grad}(p_1)$

$$\frac{\partial \vec{\underline{v_1}}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0}\frac{\partial \underline{p_1}}{\partial r}\cdot\vec{u_r}$$

$$\frac{\partial \vec{\underline{v_1}}}{\partial t} = -\frac{A_0}{\mu_0}\left[-\frac{1}{r^2}e^{j(\omega t - kr)} - jk\cdot\frac{1}{r}e^{j(\omega t-kr)}\right]\vec{u_r}$$

$$\frac{\partial \vec{\underline{v_1}}}{\partial t} = \frac{A_0}{\mu_0}\left[\frac{1}{r^2} + j\frac{k}{r}\right]e^{j(\omega t-kr)}\vec{u_r}$$

D'où $\vec{\underline{v_1}} = \frac{A_0}{\mu_0}\left[\frac{1}{r^2} + j\frac{k}{r}\right]\frac{1}{j\underbrace{\omega}_{=k.c}}e^{j(\omega t - kr)}\vec{u_r} + \underbrace{\vec{cte}}_{=\vec{0}}$ car pas de chp unif

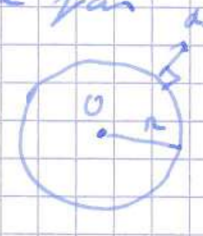
$$\boxed{\vec{\underline{v_1}} = \frac{A_0}{\mu_0 c}\left[\frac{-j}{k r^2} + \frac{1}{r}\right]e^{j(\omega t-kr)}\vec{u_r}}$$

L'onde acoustique est longitudinale, mais $\underline{p_1}$ et $\underline{v_1}$ ne vibrent pas en phase, car :

$$\vec{\underline{v_1}} = \underbrace{\frac{1}{\mu_0 c}\left[1 - \frac{j}{kr}\right]\underline{p_1}}_{\underline{v_1}}\vec{u_r}$$

(c) Puissance reçue par une sphère centrée sur la source

Calculons la puissance moyenne reçue par une sphère (S) de rayon r centrée en O :



$$\mathcal{P}(r) = \left\langle \oiint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \right\rangle = \oiint_{(S)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS}$$

$$= \oiint_{(S)} \langle p_1 \cdot \vec{v_1} \rangle \vec{dS} = \oiint_{(S)} \langle p_1 \cdot v_1 \vec{u_r} \rangle \cdot dS \, \vec{u_r}$$

$$\mathcal{P}(r) = \oiint_{(S)} \langle p_1 \cdot v_1 \rangle \, dS$$

⚠ Dans cette expression de la puissance on doit utiliser les <u>champs réels</u> ! Cherchons la partie réelle de $\underline{p_1}$ et $\underline{v_1}$:

$$p_1 = \mathrm{Re}(\underline{p_1}) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr)$$

$$v_1 = \mathrm{Re}(\underline{v_1}) = \mathrm{Re}\left[\frac{A_0}{\mu_0 c}\left(\frac{-j}{kr^2} + \frac{1}{r}\right)\left(\cos(\omega t - kr) + j\sin(\omega t - kr)\right)\right]$$

$$\mathrm{Re}(\underline{v_1}) = \frac{A_0}{\mu_0 c} \cdot \left[\frac{1}{r}\cos(\omega t - kr) + \frac{1}{kr^2}\sin(\omega t - kr)\right]$$

D'où :

$$\langle p_1 \cdot v_1 \rangle = \left\langle \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr) \cdot \frac{A_0}{\mu_0 c}\left[\frac{1}{r}\cos(\dots) + \frac{1}{kr^2}\sin(\dots)\right]\right\rangle$$

Or $\langle \cos(\omega t - kr) \cdot \sin(\omega t - kr) \rangle$

$$= \left\langle \frac{1}{2}\sin[2(\omega t - kr)] \right\rangle = 0$$

$\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$

Donc : $\langle p_1 v_1 \rangle = \dfrac{A_0^2}{2\mu_0 c r^2}$

Finalement : $\mathcal{P}(r) = \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{A_0^2}{2\mu_0 c \cancel{r^2}} \cdot \cancel{r^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\mathcal{P}(r) = \frac{A_0^2}{2\mu_0 c} \underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{= 4\pi}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(r) = \frac{2\pi A_0^2}{\mu_0 c} = \mathcal{P}}$$

La puissance calculée est indépendante de r.
Autrement dit, chaque seconde (en RS), l'énergie reçue par une sphère de rayon R_1 est égale à celle reçue par une sphère de rayon R_2.

Conclu :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour une onde sphérique, l'intensité acoustique ou puissance surfacique moyenne} \\ I = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{u}_r \rangle \text{ décroît en } 1/r^2 \text{ ce qui garantit que la puissance reçue par toute sphère centrée sur la source est la même.} \\ \text{La décroissance des champs } p_1(r,t) \text{ et } v_1(r,t) \text{ en } 1/r \text{ traduit donc la conservation de l'énergie.}\end{array}}$$

Rq : sphère de Dyson : pas de contrainte sur le rayon !

IV/ Ordres de grandeurs ; cohérence de l'approximation acoustique.

Considérons une OPPH de niveau sonore 130 dB (cas le plus "défavorable") et vérifions la cohérence de l'approx. acoustique.

* $I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

Donc $I = I_0 \cdot 10^{\frac{I_{dB}}{10}} = 10^{-12} \times 10^{130/10}$

$$\boxed{I = 10 \, W \cdot m^{-2}}$$