Quelle est la signification du vecteur « nabla » qui peut être utilisé dans certains énoncés ?

Le vecteur nabla n'est pas vraiment un vecteur, plutôt une notation commode permettant d'exprimer les opérateurs vectoriels, mais attention, *uniquement en coordonnées cartésiennes*. Rappelons son expression :

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si f est un champ scalaire et $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel on a alors les égalités (le montrer !) :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \mathrm{div}(\overrightarrow{A})$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A})$$

Dans la méthode n°2 pour déterminer le sens de polarisation, on prend $t = T/4$. Pourquoi cette valeur ?

Dans cette méthode, on se place dans un plan donné perpendiculaire à la direction de propagation (par exemple dans le plan $z = 0$ pour une propagation suivant (Oz). On exprime ensuite le champ électrique à $t = 0$. On sait qu'à $t = T$ on retrouve la même expression (périodicité temporelle du champ). Pour $t = T/2$ on obtient un champ tourné de π, mais on ne peut pas déterminer le sens de rotation (trigo ou horaire ?). La valeur $t = T/4$ permet de répondre à cela.

Comment prouver l'équivalence entre les opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$, div et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ pour les champs réels et les opérations $\mathrm{j}\omega\times$, $\mathrm{j}\overrightarrow{k}.$ et $\mathrm{j}\overrightarrow{k}\wedge$ que l'on doit effectuer sur les champs en notation complexe ?

Ces démonstrations ne sont pas exigibles, mais elles permettent de s'entraîner sur le calcul en complese. Voir page suivante pour la méthode. L'idée est la même pour le rotationnel.

<u>Notations</u>, avec $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ et $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- <u>Réel</u> : $\vec{a} = \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)\,\vec{a_0}$

$$\vec{a} = \cos(\omega t - k_x.x - k_y.y - k_z.z + \varphi).\begin{pmatrix} a_{0x} \\ a_{0y} \\ a_{0z} \end{pmatrix}$$

- <u>Complexe</u> : $\underline{\vec{a}} = e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)}\,\vec{a_0} = e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}.\underline{\vec{a_0}}$

Montrons que $\dfrac{\partial \vec{a}}{\partial t} \longleftrightarrow j\omega \times \vec{a}$:

- $\dfrac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \boxed{-\omega \sin(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi).\vec{a_0}}$
- $j\omega \times \underline{\vec{a}} = j\omega\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)}.\vec{a_0}$

et donc $Re\{j\omega \times \vec{a}\}$

$$= Re\left\{ j\omega.\left(\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi) + j\sin(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)\right).\vec{a_0}\right\}$$

$$= \boxed{-\omega \sin(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi).\vec{a_0}}$$ OK !

Montrons que $\mathrm{div}(\vec{a}) \longleftrightarrow -j\vec{k}.\underline{\vec{a}}$:

- $\mathrm{div}(\vec{a}) = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$

$$= (-k_x).\left(-\sin(\omega t - k_x.x - k_y.y - k_z.z + \varphi)\right).a_{0x}$$
$$+ (-k_y).\left(-\sin(\quad '' \quad)\right).a_{0y}$$
$$+ (-k_z).\left(-\sin(\quad '' \quad)\right).a_{0z}$$

$$= \boxed{\sin(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi).\vec{k}.\vec{a_0}}$$

- $-j\vec{k}.\underline{\vec{a}} = -j\vec{k}.\left[e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)}.\vec{a_0}\right]$

et donc $Re\{-j\vec{k}.\vec{a}\} = Re\{-j\vec{k}.\vec{a_0}.e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)}\}$

$$= \boxed{\sin(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi).\vec{k}.\vec{a_0}}$$ OK !