

Od 4

On des électromagnétiques dans quelques milieux matériels

Oral: Comment communiquer à grande distance avec les ondes radio (problème de l'horizon)
Propagation des ondes dans des vide (Od3)
→ " " " " des milieux matériels de ce chap.

But: traiter quelques exemples particuliers pour dégager des concepts généraux et importants associés à la propagation des ondes (dans ce chap.): la dispersion et l'absorption.

⚠ de la Chapitre on notera à $\epsilon_j = -1$; la lettre j étant réservée au vecteur densité volumique de courant électrique.

I/ Onde électromagnétique dans un plasma

Dans la quasi-totalité de ce χ_2 , on considère OET de type OPPHV ^{transverse} que l'on trouve par ex. sous la forme:

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx)$$

1) un modèle simple de plasma

ⓐ Hypothèses

Plasma: état de la matière globalement neutre dans lequel les charges électriques ^{de signes} opposés

ne si pas liés entre elles, une au moins des populations pouvant se déplacer sur de grandes distances.

Ex: gaz ionisé comme l'ionosphère (ionisé due aux U.V. du Soleil). $n \sim 10^{11} \text{ m}^{-3}$! Entre 70 et 100 km d'altitude

Hyp du modèle utilisé :

- ① Plasma localement neutre : $\rho = 0$ en tout pt
- ② Plasma peu dense : cela permet de négliger les champs électriques créés par les charges p.r. au dp élec. de l'OPPH.
- ③ poids des particules (+ ou -) négligé devant autres forces
- ④ particules non relativistes : $v \ll c$.

justif physique
cohérence
 $\rho = \epsilon_0 \cdot \text{div}(\vec{E}) = 0$

⑤ Mouvement des particules chargées

* ions : masse M , charge $+e$ (par ex.)
* électrons : masse m , charge $-e$
avec $M \gg m$

Chaque particule (ion ou électron) subit la force :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{Or :}$$

$$\frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1 \quad \text{d'après ④}$$

On néglige donc la force magnétique ds ce Pb.

Une seule force exercée sur les particules : $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$
d'après ②, ③ et ce qui précède.

PFD

pour un électron : $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{E} \quad \Leftrightarrow m i \omega \vec{v}_e = -e \vec{E}$

pour un ion : $M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e \vec{E} \quad \Leftrightarrow M i \omega \vec{v}_i = e \vec{E}$

D'où :

$$\frac{\|\vec{v}_i\|}{\|\vec{v}_e\|} \sim \frac{m}{M} \ll 1$$

Conclusion : ds le plasma modélisé, seuls les électrons ont un mouvement significatif, les ions restant globalement fixes

2) Conductivité électrique du plasma

(a) Expression

Les e^- , mis en mouvement par le champ électrique de l'OPPH, vont créer un courant électrique (circulant) décrit par le vecteur densité $\vec{j}$.

Rappel : $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

$A \cdot m^{-2}$ $C \cdot m^{-3}$ $m \cdot s^{-1}$

Ici $\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e = -e n \cdot \vec{v}_e$

D'où $m \frac{d}{dt} \left(\frac{-\vec{j}}{e n} \right) = -e \vec{E}$

$$\boxed{\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{n e^2}{m} \vec{E}}$$

en notation complexe (régime forcé)

$$i \omega \vec{j} = \frac{n e^2}{m} \vec{E}$$

$$\text{soit } \vec{j} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E}$$

interaction matière - ray

Le plasma modélisé est caractérisé par une conductivité $\underline{\sigma}$ imaginaire par :

$$\boxed{\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E}} \text{ avec } \boxed{\underline{\sigma} = -i \frac{ne^2}{m\omega}} \quad \text{calculatrice}$$

($\underline{\sigma}$ en $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ou $S \cdot m^{-1}$)

Savoir retrouver

Com : * couplage matière - ray

* à ω fixé, $|\underline{\sigma}|$ est d'autant plus grand que n est grand et m petit (coléent).

* $\vec{j}$ et $\vec{E}$ st en quadrature

② Conséquence : aspect énergétique

La puissance volumique transférée des dyx aux électrons s'écrit :

$$\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \Delta \text{ grandeurs réelles!}$$

$$* \vec{E} = \text{Re} \{ \vec{E} \} = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t - kx)$$

$$* \vec{j} = \text{Re} \{ \vec{j} \} = \text{Re} \{ \underline{\sigma} \vec{E} \} = \text{Re} \left\{ -i \frac{ne^2}{m\omega} E_0 \vec{u}_y e^{i(\omega t - kx)} \right\}$$

$$\vec{j} = -\frac{ne^2}{m\omega} E_0 \vec{u}_y \times (-\sin(\omega t - kx))$$

$$\text{Donc } \left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$$

$$= \text{cte} \langle \sin(\omega t - kx) \cdot \cos(\omega t - kx) \rangle$$

$$= 0$$

$$\left(\sin(a) \cos(a) = \frac{1}{2} \sin(2a) \right)$$

Condu : en régime liné (même le régime transitoire établi)

En moyenne temporelle, le dipôle ne fournit pas d'énergie aux électrons (plus généralement aux porteurs de charges). C'est dû à la conductivité du plasma qui est imaginaire pure.

Physiquement, c'est lié au fait que les électrons se déplacent sans résistance dans le plasma (pas donc pas de collisions). Or un conducteur, par contre, ils communiqueraient une partie de leur énergie au réseau d'ions (effet Joule)

3) Equation de propagation de l'onde électro-magnétique

ⓐ Equation

Eq. de Maxwell dans le plasma: (plusieurs méthodes)

$$\begin{array}{l} (MG) \\ (MF) \\ (MA) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{E}) = 0 \\ \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = \text{grad}(\underbrace{\text{div}(\vec{E})}_{=0}) - \Delta \vec{E}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) = - \Delta \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \cdot \frac{ne^2}{m} \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

~~B~~

$$\Delta \vec{E} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ce qui n'est pas une équation de d'Alembert!

② Relation de dispersion

A quelle condition les OPPH sont-elles solutions de cette équation?

On passe en notation complexe :

$$\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En coord cart, " $\Delta = \vec{\nabla}^2$ " $\leftrightarrow -k^2 x_0$

$$\left[-k^2 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 c^2 m} - \frac{(-\omega^2)}{c^2} \right] \underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

On cherche $\underline{\vec{E}} \neq \vec{0}$, donc nécessairement :

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \right)$$

La relation de dispersion pour les OPPH dans le plasma s'écrit

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}}$ qui est appelée

pulsation plasma (rad.s^{-1}), caractéristique de ce dernier; k en m^{-1} et c en m.s^{-1}

Savoir retrouver

Exercice (important) retrouver la relation de dispersion à partir des équations de Maxwell traduites directement en notation complexe.

Com: * ds le vide on avait $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

* ω_p : pulsation "seuil"

* si $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$ donc k peut être complexe! On le notera donc k dans la suite.

A.N.: pour l'ionosphère ($n \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$) on trouve

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 3 \text{ MHz} \quad (\text{fréquence plasma})$$

→ domaine des ondes radio

③ Interprétation

paragraphe dont la portée est très générale.

⇒ très important!

Une OPPM du type $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ est solution d'une équation de propagation dans un milieu donné à condition qu'une relation dite de dispersion, s'écrivant $k = f(\omega)$ soit vérifiée.

De manière générale, on peut écrire :

$\underline{k} = k' - i k''$, avec k' et k'' des fct de ω . Alors :

Donc
compréhension !

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i[\omega t - (k' - i k'')x]}$$

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \underbrace{e^{-k''x}}_{\text{terme d'absorption/ d'atténuation exponentielle}} \cdot \underbrace{e^{i(\omega t - k'x)}}_{\text{terme de propagation de l'onde}}$$

On définit dans ce cas :

* la distance caractéristique d'atténuation :

$$\delta(\omega) = \frac{1}{|k''(\omega)|} \quad (\text{en m})$$

* la vitesse de phase, qui est la vitesse de propagation de l'OPPH (cf Od 1)

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{|k'(\omega)|} \quad (\text{en m.s}^{-1})$$

Vec : si v_p dépend réellement de la pulsation ω , on dit que le milieu est dispersif.

Contre-exemple : ds le cas du vide, on a montré que $v_p = c = \text{cte}$. Le vide est non dispersif : ttes les OEP, quelle que soit leur fréq., se propagent à la même vitesse.

On retiendra :

* partie réelle de $\underline{k}$ $\leftrightarrow$ phénomène de propagation et dispersion

* partie imaginaire de $\underline{k}$ $\leftrightarrow$ " d'absorption

Rq: tte l'analyse précédente ^{avec $\underline{k}$} peut également s'effectuer de manière équivalente avec une grandeur bien connue en optique, que l'on peut généraliser:

Déf: on appelle indice complexe ^{d'un milieu} la grandeur sans dimension:

$$\underline{n} = \frac{\underline{k} \cdot c}{\omega}$$

A priori $\underline{n}$ dépend de ω (milieu dispersif).

Si $\underline{k}$ est réel, alors $\underline{n} = \frac{k \cdot c}{\omega}$ et $v_g = \frac{\omega}{k}$.

On retrouve la définition $n = \frac{c}{v_g}$ vue en optique.

Exercice: exprimer $\underline{n}$ ds le cas du plasma modélisé.

4) Plasma dans son domaine "réactif" ($\omega < \omega_p$)

a) Expression de l'OET

D'après la relation de dispersion: $\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$
ds ce cas $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k}$ est un