

imaginaire pur. Il s'écrit :

$$\underline{k} = \pm i \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$

Le cas "+" conduit à des ondes dont l'amplitude croît exponentiellement. On l'écarte en général (sauf si c'est dans une zone limitée de l'espace). D'où :

$$\underline{k} = -i \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = -ik'' \quad (\text{avec } k' = 0)$$

D'où :

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \underbrace{e^{-k''x} \cdot e^{i\omega t}}$$

du type $f(x) \cdot g(t)$

L'OERI est du type stationnaire, elle ne se propage pas.

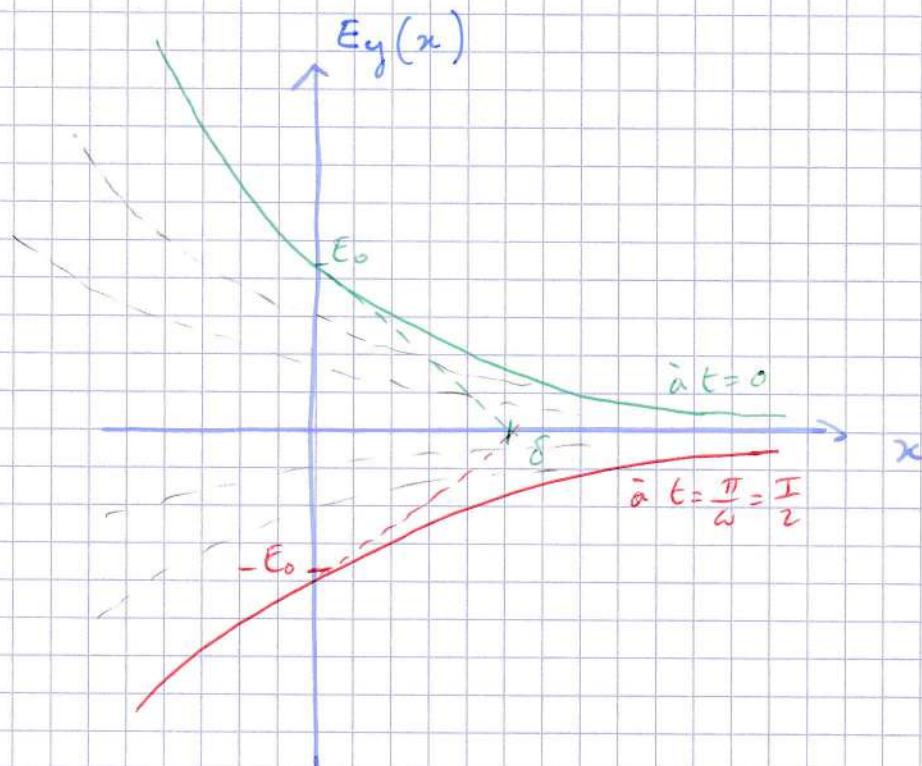
A retenir (vocabulaire)

Dans le domaine "réactif" (pour $\omega < \omega_p$), les ondes dans le plasma sont dites évanescentes (stationnaires + atténuées)

Com : * "réactif" car le plasma (par le biais du mouvement des e^-) s'oppose à la propagation de l'onde.

$$* \underline{E} = \text{Re} \{ \underline{E}_0 \cdot e^{-k''x} \cdot e^{i\omega t} \} = E_0 \underline{u}_y \cdot e^{-k''x} \cos(\omega t)$$

$$\text{Donc } E_y(x, t) = E_0 \underline{e^{-k''x}} \cdot \cos(\omega t)$$



① Aspect énergétique

Cherchons à exprimer $\langle \vec{T} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle$

$$* \vec{E} = E_0 e^{-k''x} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

$$* \text{ pour trouver } \vec{B}, \text{ on utilise } \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\Delta \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{E} \text{ valable ds le vide})$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \dots = \frac{\partial E_x}{\partial x} \vec{u}_y = -k'' E_0 e^{-k''x} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

$$0' \text{ on } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = k'' E_0 e^{-k''x} \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''x} \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

$$* \vec{T} = \frac{k''}{\omega} E_0^2 e^{-2k''x} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_x$$

→ ng distance caract énergie

$$* \langle \vec{T} \rangle = 0$$

En moyenne temporelle, il n'y a pas de propagation d'énergie pour l'onde évanescente

5) Plasma dans son domaine de transparence ($\omega > \omega_p$)

② Expression de l'OERI

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2) \quad . \text{ Dans ce cas } \underline{k}^2 > 0 \text{ donc}$$

$\underline{k}$ est en réalité réel dans ce cas :

$$k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} = k' \quad (k'' = 0)$$

D'où :

$$\underline{E} = e^{i(\omega t - k'x)} \cdot \underline{E}_0$$

Dans le domaine $\omega > \omega_p$ le plasma est "transparent" : les OPPH s'y propagent sans être absorbés.

③ Vitesse de phase

Elle s'écrit :

$$v_p = \frac{\omega}{|k'|} = \frac{\omega \cdot c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Suit

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

~~B~~ et on a

Conc : v_p dépend explicitement de ω . Donc le plasma est un milieu dispersif. Rq: il devient non dispersif à hautes fréquences :
 $v_p \rightarrow c$ qd $\omega \gg \omega_p$.

* cō $\omega > \omega_p$ on a $v_g > c$ ce qui peut paraître surprenant, mais pas interdit, car elle ne correspond pas à la vitesse de propagation d'une particule matérielle.

On aimerait et de in mettre en évidence une vitesse de propagation plus concrète, accessible à la mesure. Rappel: les OPPH sont des idéalisations, sans réalité physique.

© Vitesse de groupe

(général)

Déf: on appelle paquet d'ondes la superposition d'ondes de vecteurs d'onde voisins (centrée par exemple sur k_0).

Voir doc. 1 (démō non exigible)

Simulations (voir site)

* milieu non absorbant faiblement dispersif (ex: plasma)



* milieu non absorbant dispersif



Réf vitesse de groupe : (général)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$m \rightarrow 1$

absorption négligeable,
faible dispersion

T&D
178A
p 548

Ds le cas du plasma, pour $\omega > \omega_p$:

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

on différencie

$$2k \cdot dk = \frac{1}{c^2} \times 2\omega d\omega$$

$$\text{D'où } d\omega = \frac{c^2 \cdot k}{\omega} dk$$

$$\text{Soit } v_g = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p}$$

Plasma

$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Autre méthode : exprimer $\omega = f(k)$ et dériver par rapport à k .

A retenir :

Ds le cas d'un milieu non absorbant et faiblement dispersif, la vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.

On remarque que ds ce cas on a bien $v_g < c$.

II/ Onde électromagnétique dans un conducteur ohmique

1) Cadre et hypothèses

Def: conducteur ohmique: diélectrique satisfaisant la loi d'Ohm, c'est-à-dire aux bornes duquel la tension est proportionnelle au courant qui le traverse

A nouveau, on cherche à décrire la propagation d'une OET dans ce milieu. On la cherche sous la forme d'une OPPH transverse:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

Hyp du modèle

- ① conducteur ohmique localement neutre: (cohérent (avec $\text{div}(\vec{E}) = 0$) $\rho = 0$)
- ② on suppose que le conducteur ohmique possède une conductivité γ réelle constante. Il satisfait donc la loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.
- ③ On suppose le régime lentement variable

Traduisons ce dernier point à l'aide de (PIA):

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \gamma \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Comparons:

$$\frac{\| \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \|}{\| \mu_0 \gamma \vec{E} \|} \sim \frac{\epsilon_0 \mu_0 E_0 \omega}{\mu_0 \gamma E_0} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma}$$

l'hyp. se traduit par $\frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma} \ll 1$
soit $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0}$

A.N. pour le cuivre : $\gamma = 595 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$

et $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

soit $\omega \ll 7 \cdot 10^{19} \text{ rad.s}^{-1}$

ou $f \ll 1 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$ (rayons X)

Au final, l'hyp permet de négliger le courant de déplacement $\vec{j}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, c'est-à-dire l'ARQS,

mais la contrainte sur la gamme de fréquence est moins stricte que dans cette dernière (dans le cas d'un métal).

Rq: hyp ③ revient à dire que l'on a affaire à un bon conducteur

2) Equation de propagation de l'onde électro-magnétique

Eq. de Maxwell dans le conducteur ohmique :

(M) $\text{div}(\vec{E}) = 0$ ⚠

(MF) $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(MΦ) $\text{div}(\vec{B}) = 0$

(MA) $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ ⚠ $\rightarrow \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \vec{E}$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\underbrace{\text{div}(\vec{E})}_{=0}) - \Delta \vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}(\vec{B})) = -\Delta \vec{E}$$

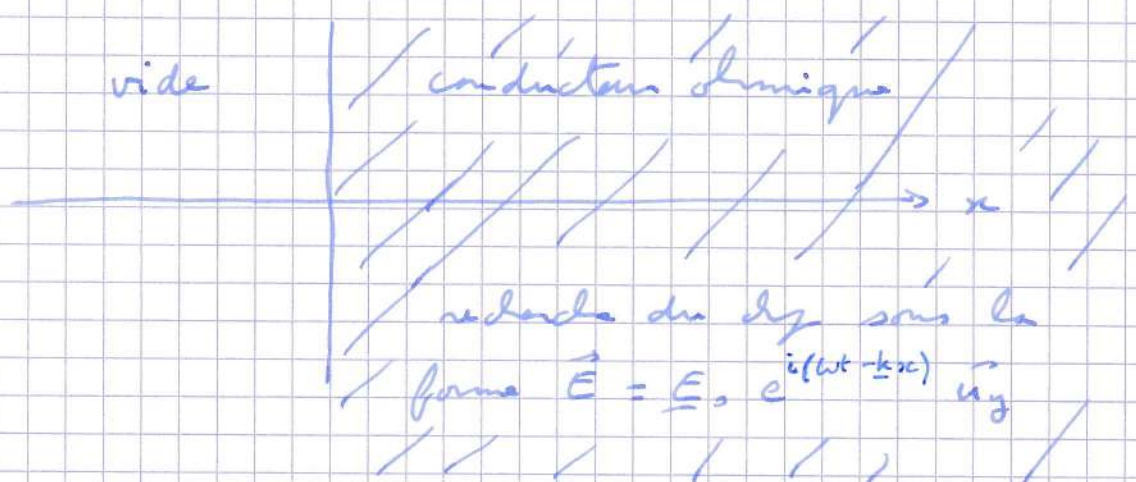
Dans ce cas l'équation qui caractérise l'onde électromagnétique est de type diffusion :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

(Rappel: éq. de diffusion thermique: $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$ avec $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$)

Com: ce n'est pas une éq. de propagation de type d'Alembert. Elle a un caractère irréversible traduisant la dissipation de l'énergie (effet Joule).

3) Relation de dispersion



$$-\underline{k}^2 - \mu_0 \gamma i \omega = 0$$

$$\underline{k}^2 = -\mu_0 \gamma \omega i$$

$$\underline{k} = \mu_0 \gamma \omega e^{-i\pi/2}$$

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{-i\pi/4}$$

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

On garde le signe "+" car l'onde se dirige
ds le sens des x croissants et on pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} :$$

$$\underline{k} = \frac{1}{\delta} (1-i)$$

4) Interprétation

$$\underline{k} = \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{k'} - i \times \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{k''}$$

D'ici l'expression de l'OEM :

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{u}_y$$

$$\text{soit } \vec{E} = \underbrace{E_0 \cdot e^{-x/\delta}}_{\text{terme d'absorption}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \frac{x}{\delta})}_{\text{terme de propagation}} \vec{u}_y$$

Conclusion : dans le modèle, l'OEM se propage
dans le conducteur ohmique en étant atténuée
sur une distance caractéristique d'
atténuation (ou de pénétration) appelée épaisseur
de peau :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

$\swarrow$ μ_0 $\swarrow$ γ $\swarrow$ ω
 H.m^{-1} ohm.m^{-1} s.m^{-1}

Alors à un instant qq :