Document 1 : Notion de paquet d'onde et de vitesse de groupe

Il est également temps de discuter l'utilisation pratique d'une onde monochromatique pour décrire des phénomènes physiques. Ce sont certes les seules ondes qui possèdent une pulsation et une longueur d'onde bien déterminée, mais même les sources lumineuses les plus monochromatiques tels les LASER ne sont pas idéales et les émissions sont élargies. Cet élargissement peut provenir du temps d'émission fini d'une impulsion, etc.

Puisque les équations de base sont linéaires, c'est en principe un exercice élémentaire d'effectuer la superposition appropriée de solutions monochromatiques. Ce schéma se complique toutefois dans les milieux dispersifs :

1. Comme on vient de la voir, la vitesse de phase n'est pas la même pour chaque composante fréquentielle de l'onde. En conséquence, les différentes composantes se propagent à des célérités différentes, et ont tendance à se déphaser les unes par rapport aux autres.

2. Dans un milieu dispersif, la vitesse de l'énergie peut être très différente de la vitesse de phase, voir elle peut ne posséder que peu de sens.

3. Si le milieu est de plus dissipatif (k est complexe), l'impulsion initiale sera atténuée le long de son trajet (voir section précédente).

On va considérer la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma selon la direction Ox, ainsi qu'une polarisation rectiligne pour le champ électrique selon l'axe Oy. La relation de dispersion sera notée sous la forme générale[12]

$$\omega = \omega(k)$$

12. On pourra donc appliquer les mêmes arguments pour tout milieu dispersif, non dissipatif.

Comme les propriétés dispersives ne peuvent dépendre du sens de propagation de l'onde, ω doit être une fonction paire de k : $\omega(-k) = \omega(k)$. Généralement, c'est une fonction lentement variable, mais il existe des régions de « dispersion anormale » pour lesquelles ω varie très rapidement en fonction de k. Le formalisme détaillé ici peut s'appliquer aussi bien aux électromagnétiques, qu'aux ondes acoustiques, ou qu'aux ondes de matière de de Broglie.

Nous considérons donc une onde électromagnétique constituée de plusieurs OPPM ; on peut donc écrire la superposition :

$$E_y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{j(\omega(k)t - kx)} dk. \quad (37)$$

Le facteur $1/\sqrt{2\pi}$ a été rajouté pour se conformer à la notation intégrale de Fourier. L'amplitude $A(k)$ décrit les propriétés de la superposition des ondes monochromatiques. Cette amplitude est donnée par la transformée de Fourier du champ E_y initial :

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x,0) e^{jkx} dx.$$

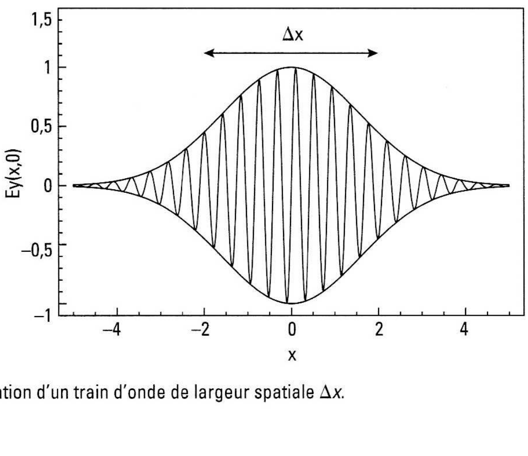

Fig 6. Représentation d'un train d'onde de largeur spatiale Δx.

Si à l'instant initial, $E_y(x, 0)$ représente un train d'onde de longueur Δx, tel que représenté sur la figure 6, alors l'amplitude $A(k)$ sera une fonction centrée autour d'un vecteur d'onde k_0 et de largeur Δk. k_0 est le vecteur d'onde dominant dans l'onde $E_y(x, 0)$.

Propriété

Si Δx est la largeur spatiale du paquet d'onde et Δk la largeur en k, alors on peut montrer, dans la théorie de Fourier que

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}.$$

On peut également raisonner sur la largeur temporelle Δt et la largeur fréquentielle $\Delta\omega$ de ce paquet d'onde. On trouve également

$$\Delta t \Delta\omega \geq \frac{1}{2}.$$

Une fois que le paquet d'onde $E_y(x, 0)$ est émis, il va évoluer dans le temps et l'espace. Toutes les composantes monochromatiques vont se déplacer à une vitesse différente, le train d'onde va alors se déformer. On suppose que la fonction $A(k)$ est relativement piquée autour de la valeur k_0 (c'est-à-dire que $\Delta k << k_0$). Dans ce cas, on peut écrire :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}(k - k_0) + \ldots \quad (38)$$

ce qui donne dans l'expression du champ électrique :

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{j((\omega_0 + (d\omega/dk)|_{k_0}(k - k_0))t - kx)}dk \\ &= e^{j(\omega_0 - k_0(d\omega/dk)|_{k_0})t}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{jk((d\omega/dk)|_{k_0}t - x)}dk \end{aligned}$$

où $\omega_0 = \omega(k_0)$. Dans le terme intégral, on reconnaît la condition initiale, mais à une autre position $E_y(x', 0)$ avec $x' = x - (d\omega/dk)|_{k0}t$:

$$E_y(x,t) \approx E_y\left(x - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t, 0\right)e^{j(\omega_0 - k_0(d\omega/dk)|_{k_0})t}. \quad (39)$$

Cette expression montre, qu'à un facteur de phase global près, le paquet d'onde voyage sans distorsion avec une vitesse, appelée **vitesse de groupe** et définie par

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}, \quad (40)$$

qui est donc la vitesse de l'enveloppe du paquet d'onde représenté sur la figure 6.

Source : Tisserand, *Tout-en-un Physique PC*, éditions Bréal.