

DISPERSION, ABSORPTION

Exercice 1 : Propagation, atténuation, amplification

Une pseudo-OPPH a pour expression

$$\underline{G}(x, t) = \underline{G}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \text{ avec } \begin{cases} \underline{G}_0 = G_0 e^{i\varphi} \\ \underline{k} = k' + ik'' \end{cases}$$

On suppose $k' > 0$.

- Donner l'expression de $G(x, t)$ en grandeur réelle.
- Justifier que l'onde se propage dans le sens des x croissants.
- Justifier qu'elle se propage en s'atténuant si $k'' < 0$, en s'amplifiant si $k'' > 0$.

Exercice 2 : de \underline{k} à l'EDP

Une onde plane $G(x, t)$ a pour vecteur d'onde complexe $\underline{k} = k \vec{u}_x$. On suppose que \underline{k} vérifie la relation de dispersion

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega - i\omega_0}{c}$$

Établir une équation aux dérivées partielles du second ordre compatible avec cette relation.

Aide : commencer par élever la relation au carré pour soulever l'ambiguïté sur les signes.

Exercice 3 : Calcul d'une pulsation plasma

L'hélium de masse molaire $M = 4,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de numéro atomique $Z = 2$ est assimilé à un gaz parfait à la pression $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et à la température $T = 1000 \text{ K}$. On donne $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. On suppose qu'il devient un plasma totalement ionisé. Déterminer n_0 et calculer la pulsation plasma ω_p .

Exercice 4 : Communications et ionosphère

- Pourquoi l'ionosphère est-elle un plasma ?
- Au sol un émetteur envoie verticalement une onde hertzienne de fréquence réglable. En-dessous de 3 MHz, un récepteur situé au sol reçoit un signal 0,6 ms après l'émission. Expliquer les phénomènes observés et en déduire les valeurs numériques de quatre grandeurs.
- Déduire de ce qui précède la manière dont on peut communiquer :
 - du sol terrestre vers le sol ;
 - du sol terrestre vers l'espace (satellite par exemple).

Faire des schémas et préciser les fréquences utilisées dans chaque cas.

Exercice 5 : (*) Transparence ultraviolette des métaux

Dans un métal comportant n_0 électrons libres par mètre cube, ceux-ci (de masse m et de charge $-e$) subissent l'action mécanique d'une onde électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$, une force de frottement $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$ et leur poids. On suppose que le métal reste neutre.

- Écrire la loi de la quantité de mouvement pour un électron de vitesse \vec{v} .

- b) On admet que plusieurs termes peuvent être négligés dans cette relation et on l'écrit ainsi :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(M, t) - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

La densité volumique de courant associée à ce déplacement d'électrons est

$$\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$$

Établir l'équation de dispersion vérifiée par le vecteur d'onde complexe $\vec{k} = k\vec{u}_x$.
En déduire le carré de l'indice complexe de ce métal.

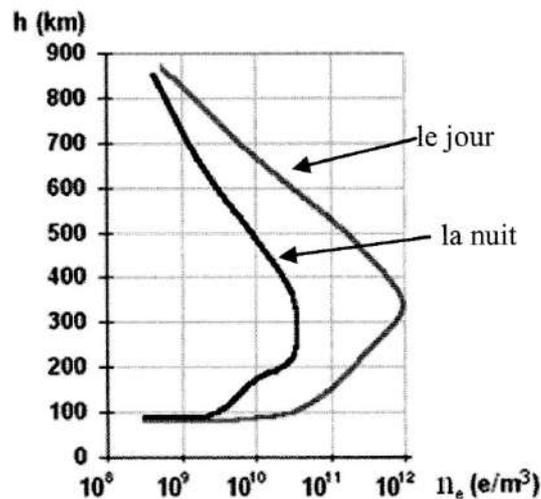
- c) Étudier le cas $\tau\omega \gg 1$ et expliquer le titre de l'exercice, sachant que $n_0 \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$, $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $m \approx 10^{-30} \text{ kg}$ et $e \approx 10^{-19} \text{ C}$.

Problème : Influence de l'ionosphère sur les transmissions GPS

On étudie dans ce problème l'influence de l'ionosphère sur les ondes électromagnétiques utilisées pour la localisation par satellite (GPS) et les moyens de s'en affranchir.

DOCUMENT n°1 : l'ionosphère

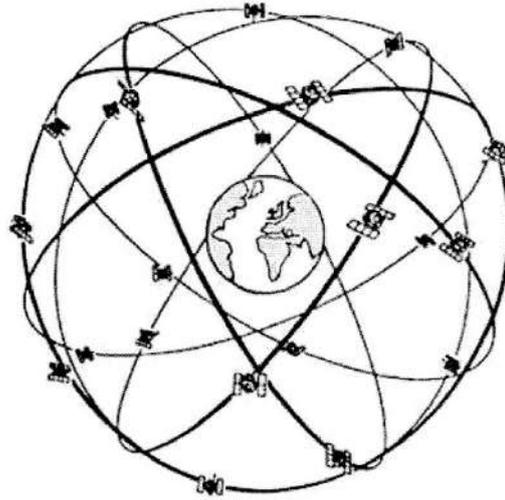
L'ionosphère forme la partie haute de l'atmosphère. Elle se situe entre 100 km et 1000 km d'altitude environ. Sous l'effet du rayonnement solaire, l'ionosphère forme ce que l'on appelle un « plasma », c'est-à-dire qu'elle est partiellement ionisée (d'où son nom). La densité volumique des électrons libres de se déplacer au sein de l'ionosphère fluctue énormément, et cela suivant de nombreux facteurs, comme par exemple la position du soleil dans le ciel, l'activité solaire ou encore la température. Sur le graphe ci-contre est représentée la densité typique d'électrons libres en fonction de l'altitude en plein jour et en pleine nuit.



DOCUMENT n°2 : le système de localisation GPS

La localisation par GPS (*global positioning system*) a été développée par l'armée américaine au début des années 70. Disponible depuis déjà de nombreuses années pour le domaine civil, elle s'appuie sur la présence de 24 satellites en orbite autour de la Terre à environ 20 000 km d'altitude. La localisation de l'appareil GPS est déduite de la mesure des temps de trajet d'ondes électromagnétiques émises par quatre satellites et reçues par l'appareil. Il faut bien au minimum quatre mesures pour déterminer d'une part les trois coordonnées de l'appareil GPS que sont sa latitude, sa longitude et son altitude et d'autre part pour synchroniser l'horloge de l'appareil qui est beaucoup moins précise que les horloges atomiques contenues dans les différents satellites.

Réseau des 24 satellites du système GPS



Les transmissions GPS s'effectuent par modulation de phase numérique sur deux bandes de fréquence :

- la bande L1 de fréquence centrale $f_1 = 1575,42$ MHz
- la bande L2 de fréquence centrale $f_2 = 1227,60$ MHz.

On rappelle les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

Charge d'un électron : $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C,

Masse d'un électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,

Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹,

ainsi que la formule : $\Delta \vec{E} = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{E}))$.

1) A la lecture des documents et en utilisant vos connaissances sur la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma, expliquer qualitativement le problème que pose la traversée de l'ionosphère des signaux GPS.

La suite du problème propose de quantifier ce problème. On note n_e la densité volumique (supposée dans un premier temps uniforme) d'électrons libres de se mouvoir dans l'ionosphère (on néglige tout frottement) et l'on néglige le déplacement des ions.

2) Justifier ce dernier point.

On considère dans le plasma une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω . On admet que l'ionosphère reste localement neutre même en présence de l'onde.

3) Ecrire l'équation du mouvement d'un électron libre. On négligera dans la suite l'accélération convective. Faire une autre approximation.

4) Montrer que l'ionosphère se comporte comme un conducteur avec une conductivité complexe $\underline{\sigma}$ que l'on explicitera.

5) Calculer la puissance volumique moyenne cédée aux électrons par le champ électromagnétique. Commenter.

6) Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique de l'onde. En déduire la relation de dispersion $k = f(\omega)$. Faire apparaître une pulsation ω_c .

7) Décrire en quelques mots l'onde si $\omega < \omega_c$. A quel type de filtre peut-on assimiler le plasma ?

8) Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour $\omega > \omega_c$. Tracer l'allure des graphes.

9) Calculer la fréquence de coupure f_c typique de l'ionosphère en plein jour et en pleine nuit. Expliquer pourquoi la transmission radio en AM (vers les 100 kHz) ne nécessite qu'un émetteur national alors que la transmission FM (émission autour de 100 MHz) nécessite des antennes régionales.

10) Montrer que le retard des signaux dû à la traversée d'une longueur L d'ionosphère (comparé au cas d'une propagation dans le vide) vaut approximativement :

$$\tau_{retard} = \frac{L}{c} \frac{f_c^2}{2f^2}$$

11) Estimer la longueur L d'ionosphère que doit traverser les ondes provenant d'un satellite situé à l'horizon. On rappelle que le rayon de la Terre vaut 6400 km.

12) Estimer dans le cas le plus défavorable l'erreur induite par la traversée de l'ionosphère sur l'estimation de la distance entre le satellite et l'appareil GPS. Est-ce une erreur systématique qui peut être enlevée de manière automatisée ?

13) Expliquer en quoi l'utilisation simultanée des deux bandes L1 et L2 permet de résoudre le problème.

Afin de mieux prendre en compte l'effet de l'ionosphère sur les ondes radio, le projet SPECTRE, développé initialement par le Ministère français de la Recherche, l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES), mis en service depuis 2004, propose une cartographie en temps réel du TEC (*Total Electron Content*) au dessus de l'Europe. Le TEC est par définition le nombre total d'électrons libres présents dans une colonne verticale d'ionosphère de 1 m^2 de section.

14) En prenant en compte la dépendance de n_e suivant l'altitude, adapter la formule de la question 10 et montrer que, dans le cas où le satellite est à la verticale de l'appareil GPS, le retard ionosphérique τ_{retard} dépend directement du TEC.

Exercice 6 : Réflexion d'une onde électromagnétique sur l'ionosphère

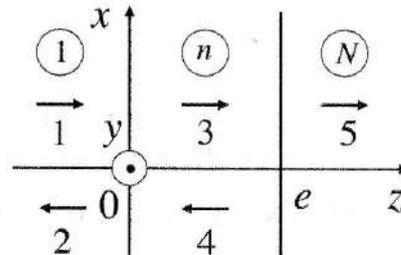
L'ionosphère, partie haute de l'atmosphère, est assimilable à un plasma neutre peu dense, de densité particulière en électrons de l'ordre de $n_0 = 10^{11} \text{ m}^{-3}$. On donne $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

- a) Calculer la pulsation plasma ω_P pour l'ionosphère.
- b) Calculer les coefficients de réflexion et de transmission, sous incidence normale, pour une onde électromagnétique infrarouge, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 3,50 \text{ }\mu\text{m}$ venant du Soleil.
- c) Une onde radio du domaine des « grandes ondes », de fréquence $f = 162 \text{ kHz}$, est issu d'une antenne à la surface de la Terre. On assimile l'air en basse atmosphère au vide pour ses propriétés électromagnétiques. Cette onde peut-elle être perçue sur la Lune ?

Exercice 7 : Couche antireflet

Afin de rendre antiréfléchissant un verre d'indice N ($z > e$), ce dernier est recouvert d'une mince couche d'épaisseur e ($0 < z < e$) et d'indice n , le tout étant placé dans l'air ($z < 0$). Les milieux étant supposés parfaitement transparents, les indices sont pris réels.

Dans l'air arrive une onde (notée 1) de champ complexe : $\vec{E}_1 = E_1^0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ (avec E_1^0 réel).



- a) Écrire tous les champs électriques \vec{E}_i et magnétiques \vec{B}_i ($i = 1$ à 5), les sens de propagation pour chaque milieu étant numérotés sur la figure, en prenant, sauf pour E_1^0 , des amplitudes E_i^0 a priori complexes, en gardant k (vide) et en introduisant les indices.
- b) Il y a continuité des champs aux interfaces ; en déduire les conditions de passage sur les deux dioptries en introduisant les phases $\varphi = nke$ et $\phi = Nke$.
- c) On souhaite $E_2^0 = 0$ (pas de lumière réfléchié dans l'air). Réduire les conditions de passage en donnant deux expressions de l'inconnue $r_2 = E_4^0 / E_3^0$ et montrer qu'elles ne sont compatibles que dans deux situations différentes conduisant chacune à des conditions à expliciter. Dans le cas de celle qui est physiquement intéressante, donner l'indice n et l'épaisseur minimale e d'un dépôt rendant antiréfléchissant un verre ordinaire d'indice $N = 1,5$ pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 0,6 \text{ }\mu\text{m}$.

Exercice 8 : (*) Réflexion sous incidence oblique

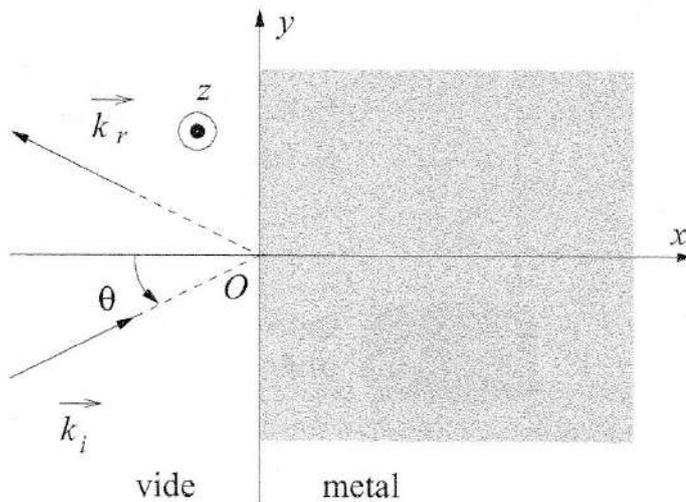
Une OPPH incidente de vecteur d'onde

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k \cos \theta \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et polarisée rectilignement

$$\vec{E}_i(M, t) = E_{0i} \vec{u}_z e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})}$$

se propage dans le demi-espace $x < 0$ et vient frapper la face plane ($x = 0$) d'un métal conducteur parfait.



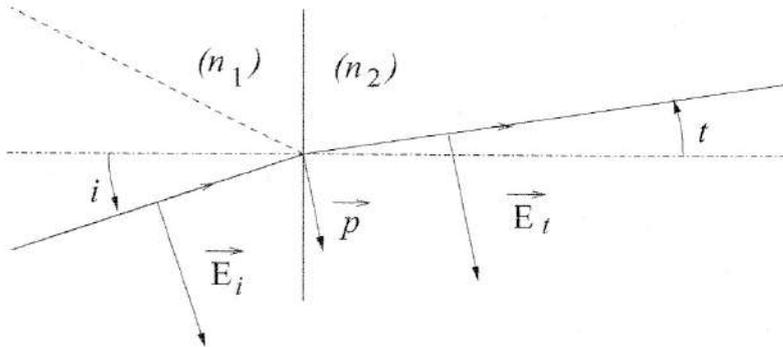
On cherche le champ électrique de l'onde réfléchie sous la forme

$$\vec{E}_r(M, t) = E_{0r} \vec{u}_z e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})} \text{ avec } \vec{k}_r = \begin{pmatrix} k_{rx} \\ k_{ry} \\ k_{rz} \end{pmatrix}$$

- Écrire les conditions aux limites sur le champ électrique en $x = 0$.
- Montrer que $\omega_r = \omega$, $k_{rz} = 0$ et exprimer k_{ry} en fonction de k et θ .
- Justifier que $k = \sqrt{k_{rx}^2 + k_{ry}^2}$. En déduire k_{rx} en fonction de k et θ .
- En déduire les lois de Descartes relatives à la réflexion sur un miroir.

Exercice 9 : (*) Polarisation par réflexion vitreuse sous incidence de Brewster

On considère une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, se propageant dans un milieu d'indice réel n_1 , et arrivant sur un dioptre délimitant un milieu d'indice n_2 avec un angle d'incidence i . On admet le modèle suivant : l'onde pénètre dans le milieu 2, donne naissance à une onde réfractée faisant un angle t avec la normale, selon la deuxième loi de Descartes. Cette onde réfractée interagit avec les dipôles en surface qui rayonnent une onde réfléchie. L'onde incidente est polarisée rectilignement, le champ électrique est dans le plan d'incidence.



- Justifier qualitativement que le moment dipolaire \vec{p} des dipôles excités par le champ électrique transmis \vec{E}_t sont colinéaires à ce champ, et que ce sont des dipôles oscillant harmoniques.
- Un dipôle oscillant, de centre O et de direction \vec{u} , émet à son tour une onde électromagnétique dans toutes les directions de l'espace ; en un point M repéré en coordonnées sphériques, la puissance de cette onde est proportionnelle à $\sin^2 \theta$, où θ est l'angle entre \vec{u} et \vec{OM} . En déduire que contrairement à la loi de Descartes, il n'y a pas d'onde réfléchie lorsque $i + t = \frac{\pi}{2}$.
- En déduire la valeur i_B correspondante (on l'appelle l'incidence de Brewster) en fonction de n_1 et n_2 . Calculer i_B et t avec $n_1 = 1,333$ et $n_2 = 1,667$.
- Décrire un procédé expérimental d'observation de la **polarisation par réflexion vitreuse** sous **incidence de Brewster**.

Exercice 10 : (*) Effet de peau sur un conducteur cylindrique

Un conducteur cylindrique d'axe \vec{Oz} et de rayon a possède une conductivité σ réelle aux fréquences envisagées. Un générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω , parallèle à Oz et qui dans le conducteur est cherché sous la forme d'un champ non uniforme $\vec{E} = \underline{E}(r)e^{i\omega t} \vec{u}_z$ avec $\underline{E}(r=a) = E_0$, valeur en surface.

Le champ \vec{E} dans le conducteur vérifie l'équation de diffusion $\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ établie en ARQS à la question 24..

a) Montrer qu'une solution du type : $\vec{E} = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta] e^{i\omega t} \vec{u}_z$ convient si $r \gg \delta$, r étant la distance d'un point du conducteur à l'axe et δ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de μ_0 , σ et ω .

On donne en coordonnées cylindriques : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$

b) Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-on donner à δ ? Tracer l'amplitude réelle E en fonction de r en admettant que \vec{E} est négligeable pour r de l'ordre ou inférieur à δ .

AN : Expliquer pourquoi un fil de cuivre ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$) de 1 mm de diamètre convient à la transmission de la fréquence domestique ($f = 50 \text{ Hz}$) ainsi qu'à celle des basses fréquences de l'électrocinétique / électronique en TP.

Ce moyen convient-il à la transmission des fréquences radio ? Expliquer et justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ dans ce cas.

c) Évaluer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par effet Joule dans un tronçon de longueur l de ce conducteur en fonction de σ , E_0 , l , a et δ dans le domaine de fréquence où $\delta \ll a$; on donne $\int_0^a e^{2r/\delta} r dr \approx \frac{a\delta}{2} e^{2a/\delta}$ pour $\delta \ll a$.

Commenter ce résultat.

d) Calculer l'intensité complexe totale \underline{I} et en déduire $\langle I^2 \rangle$ en fonction de σ , E_0 , a et δ ; on donne $\int_0^a e^{(1+i)r/\delta} r dr \approx \frac{a\delta}{1+i} e^{(1+i)a/\delta}$ pour $\delta \ll a$. En déduire la résistance R de ce tronçon en fonction de δ , a et R_0 , sa résistance en courant continu ; commentaire.