Exercice 1 : Propagation, atténuation, amplification

a) On remplace $\underline{G}_0$ et $\underline{k}$ par leurs expressions

$$\underline{G}(x,t) = G_0 e^{i\varphi} e^{i(\omega t - k'x - ik''x)}$$

$$\text{soit } \underline{G}(x,t) = G_0 e^{k''x} e^{i(\omega t - k'x + \varphi)}$$

et on prend la partie réelle de cette expression :

$$G(x,t) = G_0 e^{k''x}\cos(\omega t - k'x + \varphi)$$

b) On remarque que

$$G(0,t) = \cos(\omega t + \varphi)$$

et on peut écrire

$$G(x,t) = e^{k''x}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\frac{\omega}{k'}}\right) + \varphi\right]$$

$$\text{donc } G(x,t) = e^{k''x}\cdot G\left(0, t - \frac{x}{\frac{\omega}{k'}}\right)$$

Ce qu'on peut interpréter ainsi : « ce qui se passe en x à la date t est ce qui s'est passé un peu plus tôt en 0 (à la date $t-\tau$ avec $\tau = \frac{x}{\frac{\omega}{k'}}$, retard de l'onde ou délai de propagation entre 0 et x) et avec un facteur d'amplitude $e^{k''x}$ ». L'onde se propage donc bien dans le sens des x croissants. Notons qu'on a mis en évidence une vitesse de propagation de la phase du cosinus

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

c) Comme l'onde se propage dans le sens des x croissants, le facteur d'amplitude est une fonction croissante de x si $k'' > 0$ et l'onde s'amplifie, décroissante si $k'' < 0$ et l'onde s'atténue.

Exercice 2 : de $\underline{k}$ à l'EDP

On lève l'ambiguité sur le signe en élevant la relation au carré :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2i\omega_0\omega}{c^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2}$$

$$\text{soit } -(-i\underline{k})(-i\underline{k}) = -\frac{1}{c^2}(i\omega)(i\omega) - \frac{2\omega_0}{c^2}(i\omega) - \frac{\omega_0^2}{c^2}$$

$$\text{donc } (-i\underline{k})(-i\underline{k})\underline{G}(x,t) =$$

$$\frac{1}{c^2}(i\omega)(i\omega)\underline{G}(x,t) + \frac{2\omega_0}{c^2}(i\omega)\underline{G}(x,t) + \frac{\omega_0^2}{c^2}\underline{G}(x,t)$$

et en utilisant l'équivalence complexe-temporelle on en déduit l'EDP

$$\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial t^2} + \frac{2\omega_0}{c^2}\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} + \frac{\omega_0^2}{c^2}G(x,t)$$

Exercice 3 : Calcul d'une pulsation plasma

Notons n_1 le nombre d'atomes par mètre cube dans le gaz d'hélium. La loi des gaz parfaits donne

$$PV = nRT = \frac{N}{\mathcal{N}_A}RT \text{ donc}$$

$$n_1 = \frac{N}{V} = \frac{P\mathcal{N}_A}{RT} = 7{,}33\cdot 10^{24}\ \text{m}^{-3}$$

S'il devient un gaz totalement ionisé, chaque atome libère $Z = 2$ électrons donc

$$n_0 = 2n_1 = 14{,}7\cdot 10^{24}\ \text{m}^{-3}$$

Par application de la formule du cours :

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} = 2{,}16\cdot 10^{14}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Exercice 4 : Communications et ionosphère

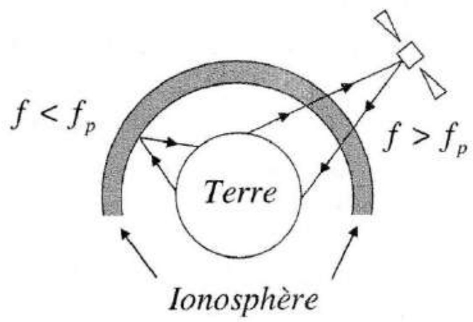
Dans la haute atmosphère (où la pression est très faible), les couches d'air sont plus ou moins fortement ionisées par les rayonnements ultraviolets et corpusculaires du Soleil. Ces couches conduisent à un plasma peu dense ($n \approx 10^{11}$ m^{-3} le jour et $n \approx 10^{9}$ m^{-3} la nuit) appelé ionosphère et constitué d'électrons et d'ions O_2^+, NO^+ et O^+.

- L'ionosphère se comporte pour les ondes électromagnétiques comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure (la pulsation de plasma) $\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$ où m et e sont la masse et la charge de l'électron. L'énoncé donne $\underline{f_p \approx 3 \text{ MHz}}$ (soit $\lambda_p \approx 100$ m) la fréquence en-dessous de laquelle l'ionosphère se comporte comme une sorte de miroir réfléchissant vers le sol les ondes hertziennes de fréquence $f < f_p$.
- On déduit de cette fréquence de coupure la densité électronique $\underline{n \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}}$.
- Si h est l'altitude de l'ionosphère, alors le retard $\tau = 0{,}6$ ms correspond au temps que met l'onde à effectuer l'aller et le retour dans l'air : $2h = c\tau$ d'où $\underline{h \approx 90 \text{ km}}$.
- La question **21.** donne la profondeur de pénétration de l'onde évanescente :

$$\delta = \frac{1}{k''} = \frac{1}{\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} \approx \frac{c}{\omega_p} = \frac{\lambda_p}{2\pi} \approx 16 \text{ m} \quad \text{soit} \quad \underline{\delta \approx 16 \text{ m}}$$

  l'approximation $\omega^2 \ll \omega_p^2$ est valable dès que $\omega < \omega_p/10$; cette profondeur de pénétration est faible devant l'épaisseur de la couche ionosphérique.

L'application concerne les moyens de propagation des ondes hertziennes sur Terre :



- Pour $f < f_p$ (les « grandes ondes »), on utilise de jour la réflexion ionosphérique (les ondes ne rentrent pas dans l'ionosphère) pour transmettre les ondes radio d'un endroit de la Terre à un autre.
- Pour $f > f_p$ (la « bande FM » en particulier vers 100 MHz), on utilise la transparence ionosphérique (les ondes traversent l'ionosphère sans absorption) pour communiquer avec les satellites (en orbite au-delà de l'ionosphère) pour les transmissions téléphone, radio, Internet, GPS,...

Exercice 5 : (*) Transparence ultraviolette des métaux

a) La prise en compte de la force de Lorentz donne

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}(M,t) - e\vec{v}\wedge\vec{B}(M,t) - \frac{m}{\tau}\vec{v} + m\vec{g}$$

b) En grandeurs complexes, l'équation mécanique s'écrit

$$im\omega\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}$$

On en déduit la densité volumique complexe de courant

$$\underline{j} = -n_0 e\underline{\vec{v}} = \frac{n_0 e^2}{m\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)}\underline{\vec{E}}$$

et les équations de Maxwell, en utilisant la neutralité du métal :

$$\text{(MG)}\ -i\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \qquad \text{(MT)}\ -i\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$$
$$\text{(MF)}\ -i\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}} \qquad \text{(MA)}\ -i\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{j}} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\underline{\vec{E}}$$

On simplifie et on élimine $\vec{j}$ grâce à l'équation mécanique.

$$\underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \text{ et } \underline{\vec{k}}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} \text{ et}$$

$$\underline{\vec{k}}\wedge\left(\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}\right) = i\frac{\mu_0 n_0 e^2\omega}{m\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)}\underline{\vec{E}} - \mu_0\varepsilon_0\omega^2\underline{\vec{E}}$$

D'où, après développement du double produit vectoriel et simplification, l'équation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m\left(1-i\frac{1}{\tau\omega}\right)}$$

On en déduit le carré de l'indice complexe

$$\underline{n}^2 = \frac{\underline{k}^2 c^2}{\omega^2}$$

c) Si $\tau\omega \gg 1$, l'équation de dispersion se simplifie :

$$\underline{k}^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m}$$

Cette quantité est positive si

$$\omega > e\sqrt{\frac{n_0}{m\varepsilon_0}} \simeq 1{,}6\cdot 10^{16}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Cette valeur correspond à une longueur d'onde dans le vide

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\times 3\cdot 10^8}{1{,}6\cdot 10^{16}} = 118\ \text{nm}$$

et corespond aux proches ultraviolets. Dans ce cas, $\underline{k}$ est donc réel, il y a propagation sans atténuation d'une onde électromagnétique ultraviolette dans le métal : il est donc transparent.

Problème : Influence de l'ionosphère sur les transmissions GPS

1) L'onde électromagnétique, lors de sa propagation dans l'ionosphère, met en mouvement les électrons libres. Le courant électrique ainsi généré interagit avec l'onde et modifie sa vitesse (dans le domaine de transparence, voir plus loin). Les ondes émises par les satellites vont alors subir un retard lors de leur traversée dans l'ionosphère. Puisque la localisation par le système GPS est basée sur la mesure des temps de trajet, l'ionosphère va provoquer des erreurs sur l'estimation de la distance entre les satellites et l'appareil GPS et donc une erreur de localisation. Guidés par l'énoncé, menons l'enquête pour quantifier cette erreur !

2) Prenons le cas de l'ion He^+ (remarque : en haute atmosphère, l'hélium est en proportion beaucoup plus grande que dans la basse atmosphère car il est beaucoup plus léger que l'azote ou l'oxygène). Son isotope le plus répondu contient 4 nucléons. Or, un proton ou un neutron pèse environ 2000 fois plus qu'un électron. Il y a donc environ 4 ordres de grandeur entre la masse des ions et des électrons. La force électrique provoquant la mise en mouvement d'un ion He^+ et d'un électron étant la même au signe près, la loi de la quantité de mouvement indique que l'accélération de l'ion, inversement proportionnelle à la masse, sera très faible devant celle de l'électron. Leur densité et leur charge étant les mêmes (au signe près), les ions vont donner une contribution négligeable au courant électrique en comparaison des électrons. On peut donc négliger leur mouvement, du fait de leur plus grande inertie.

3) Les collisions/frottements étant négligés, l'électron ne subit que la force de Lorentz. La loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. En assimilant les électrons libres à un fluide, la dérivée intervenant dans cette loi est une dérivée particulaire. On peut écrire $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ si l'on néglige l'accélération convective. Par ailleurs, si l'ionosphère influe peu sur la propagation de l'onde (à vérifier a posteriori), la relation de structure permet d'écrire en ordre de grandeur $B \approx \dfrac{E}{c}$. Donc $\dfrac{\left|\vec{v} \wedge \vec{B}\right|}{\left|\vec{E}\right|} \approx \dfrac{v}{c} << 1$ si les électrons restent non relativistes (à vérifier a posteriori également). On a alors $\boxed{m\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}}$.

4) Le vecteur densité de courant électronique dans le plasma s'écrit $\vec{j} = -en_e\vec{v}$, d'où $\dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t} = +\dfrac{e^2 n_e}{m}\vec{E}$. En régime forcé par l'onde électromagnétique et en notation complexe, $\dfrac{\partial}{\partial t} \equiv \times i\omega$. La relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$ peut alors se mettre sous la forme $\vec{j} = \underline{\sigma}\vec{E}$, avec une conductivité complexe $\boxed{\underline{\sigma} = -i\dfrac{n_e e^2}{m\omega}}$.

5) La puissance volumique instantanée cédée aux électrons par le champ électromagnétique vaut $P_{vol} = \vec{j}.\vec{E}$. Il s'agit d'un produit de fonctions sinusoïdales, il faut donc revenir à la notation réelle avant de le calculer. En notant $\vec{E} = \vec{E}_{amp}\cos(\omega t + \varphi)$, on a $\vec{j} = \mathrm{Re}\left(-i\dfrac{n_e e^2}{m\omega}\exp(i(\omega t + \varphi))\right) = \dfrac{n_e e^2}{m\omega}\vec{E}_{amp}\sin(\omega t + \varphi)$. D'où une puissance volumique $P_{vol} = \dfrac{n_e e^2}{m\omega}E_{amp}^2\cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi)$. Puisque $\cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi) = \dfrac{1}{2}\sin(2(\omega t + \varphi))$, on en déduit $\langle P_{vol}\rangle = 0$. En moyenne, l'onde électromagnétique ne cède pas de puissance aux électrons. Cela signifie qu'elle ne va pas être absorbée par l'ionosphère : elle sera donc réfléchie ou transmise sans atténuation.

6) On combine les équations de Maxwell en prenant en compte le courant électronique. On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

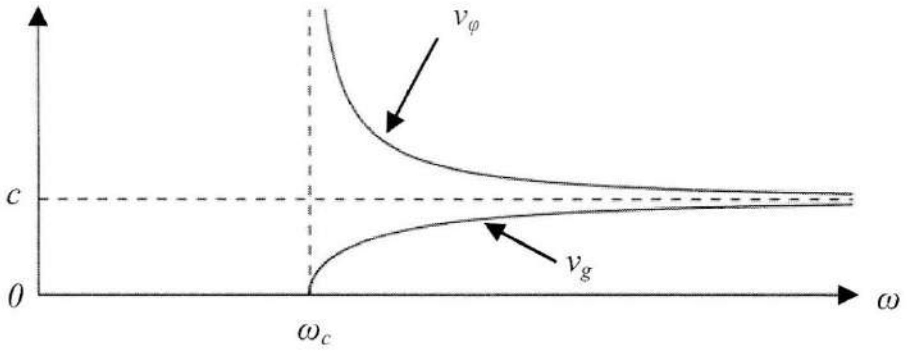
$\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) = \vec{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right)\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$, d'après l'équation de Maxwell-Ampère. Or $\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right)\right) = \vec{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\vec{E}\right)\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$, puisque $\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = 0$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss, l'ionosphère étant localement neutre. D'où :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \mu_0\frac{e^2 n_e}{m}\vec{E}}.$$

Pour une onde plane progressive harmonique de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω, on sait que $\dfrac{\partial}{\partial t} \equiv \times i\omega$ et $\Delta = \vec{\nabla}^2 \equiv \times\left(-i\vec{k}\right)^2 = -k^2$. D'où $\left(-k^2 - \mu_0\varepsilon_0\left(-\omega^2\right) - \mu_0\dfrac{e^2 n_e}{m}\right)\vec{E} = \vec{0}$. Le champ étant non nul, en posant $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ (vitesse de la lumière dans le vide) et $\boxed{\omega_c = c\sqrt{\mu_0 \dfrac{e^2 n_e}{m}} = e\sqrt{\dfrac{n_e}{m\varepsilon_0}}}$, on obtient $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}}$.

7) Si $\omega < \omega_c$, k est imaginaire pur. Il s'agit d'une onde stationnaire atténuée appelée « onde évanescente ». Le champ électrique oscille dans tout l'espace en phase et son amplitude décroît exponentiellement à l'intérieur du plasma. Ce résultat n'est pas en contradiction avec la remarque faite à la question 5 puisqu'une onde évanescente ne transporte pas en moyenne d'énergie : celle-ci rentre et ressort en permanence de l'ionosphère. Une onde électromagnétique en incidence sur l'ionosphère est donc entièrement réfléchie si $\omega < \omega_c$. A l'inverse, si $\omega > \omega_c$, k est réel : l'onde est homogène et se propage sans atténuation. A noter que si $\omega >> \omega_c$, alors $k \approx \dfrac{\omega}{c}$: l'ionosphère se comporte comme le vide, le champ électrique oscillant trop rapidement pour mettre en mouvement les électrons. Au final, l'ionosphère se comporte comme un $\boxed{\text{filtre passe-haut avec une pulsation de coupure } \omega_c}$.

8) Pour $\omega > \omega_c$, la vitesse de phase vaut $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}}$. La vitesse de groupe peut s'obtenir en différenciant la relation de dispersion : $2kdk = \dfrac{2\omega d\omega}{c^2}$, puisque ω_c est constante. D'où $\boxed{v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$. On en déduit l'allure des graphes.



On retrouve bien que $v_\varphi \approx v_g \approx c$ si $\omega >> \omega_c$. L'ionosphère perturbe alors très peu l'onde.

9) En plein jour, la densité d'électrons libres n_e monte à 10^{12} m^{-3} d'après le document n°1. On a alors $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = \boxed{9 \text{ MHz}}$. En pleine nuit, n_e descend à 3.10^{10} m^{-3} environ. La fréquence de coupure diminue à environ $\boxed{1{,}5 \text{ MHz}}$. On constate donc que les ondes de la bande AM, autour de 100 kHz, sont en dessous de la fréquence de coupure, et donc sont réfléchies par l'ionosphère. Un seul émetteur permet alors de couvrir tout le territoire

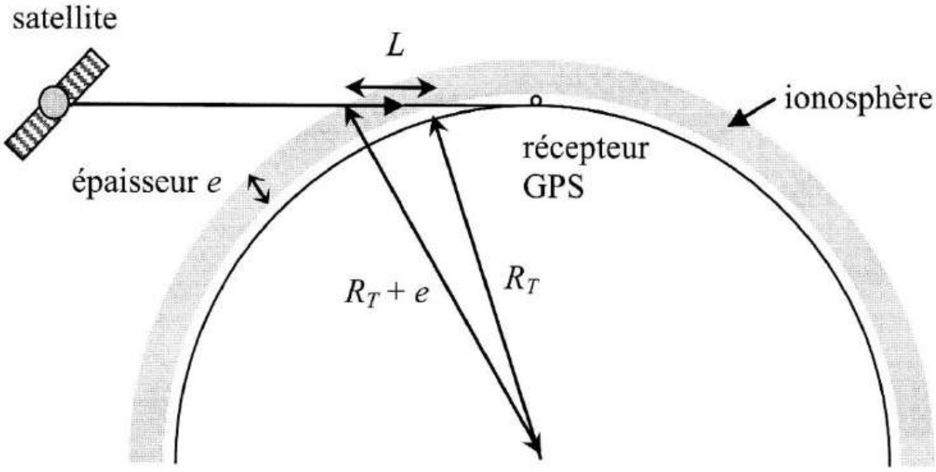
français car les ondes subissent des réflexions multiples entre le sol et l'ionosphère et peuvent donc être captées à de grandes distances. Les ondes de la bande FM, autour de 100 MHz sont bien au-delà de la fréquence de coupure et ne bénéficie pas de ce phénomène de guidage entre le sol et l'ionosphère. La portée des ondes est de ce fait beaucoup plus faible, ce qui oblige d'utiliser des émetteurs régionaux.

10) Une onde électromagnétique met un temps $\frac{L}{c}$ pour parcourir une distance L dans le vide. Dans le système GPS, les signaux sont intégrés dans l'onde électromagnétique sous forme d'une modulation de phase. Comme pour une modulation d'amplitude, ces signaux se propagent à la vitesse de groupe $v_g < c$ dans l'ionosphère (vitesse de propagation de la modulation). Lors de la traversée d'une longueur L d'ionosphère, l'onde subit donc un retard cumulé égal à :

$$\tau_{retard} = \frac{L}{v_g} - \frac{L}{c} = \frac{L}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} - 1\right) \approx \frac{L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_c^2}{\omega^2} - 1\right) = \frac{L}{c}\frac{f_c^2}{2f^2}. \text{ CQFD !}$$

Le développement limité est tout à fait légitime dans le cas des signaux GPS puisque $\frac{f_c}{f} = \frac{9}{1227} = 7.10^{-3} << 1$ même dans le cas le plus défavorable.

11) On s'appuie sur le schéma suivant.



En négligeant la distance entre le sol et le bas de l'ionosphère, le théorème de Pythagore s'écrit (triangle « presque » rectangle) : $(R_T + e)^2 = R_T^2 + L^2$. Puisque $e << R_T$, on a donc $L \approx \sqrt{2eR_T}$, où e désigne l'épaisseur de l'ionosphère et R_T le rayon de la Terre. D'après le profil de la densité électronique en fonction de l'altitude, on peut approximer l'ionosphère par une couche ionisée de manière uniforme sur une épaisseur de l'ordre de $e = 200$ km. D'où une longueur d'ionosphère à traverser $L = 1600$ km. Cela reste un calcul d'ordre de grandeur puisque la densité électronique n'est en réalité pas uniforme et que la distance entre le sol et le bas de l'ionosphère est de l'ordre de 200 km. Retenons que $\boxed{L \text{ est de l'ordre du millier de km}}$.