

12) Le cas le plus défavorable est pour la bande L2 (de plus basse fréquence) et se produit quand le satellite est à l'horizon ( $L$  grand) et que l'on est en pleine journée ( $n_e$  grand). On a alors  $\tau_{retard}$  de l'ordre de  $10^{-7}$  s. Ce retard correspond à une distance de parcours dans le vide de  $c\tau_{retard} = \boxed{30 \text{ m}}$ . Cette distance est l'erreur que l'on commet en ne prenant pas en compte le fait que les ondes électromagnétiques se propagent moins vite lors de la traversée de l'ionosphère. Il s'agit d'une erreur importante puisqu'avec une telle erreur, une voiture guidée par un appareil GPS pourrait se tromper de rues en ville ! Cette erreur de distance ne peut pas être compensée de manière automatique car elle est fonction de la densité électronique de l'ionosphère qui varie d'heure et heure (suivant l'exposition du soleil) et sur plus long terme (suivant l'activité solaire). Il est possible cependant de créer des modèles qui estiment le retard ionosphérique à considérer dans le calcul de localisation, compte tenu des informations connues (heure de la journée par exemple).

13) Il est possible de calculer le retard ionosphérique en exploitant le caractère dispersif de l'ionosphère. En effet, le retard  $\tau_{retard}$  dépend de la fréquence du signal. Ainsi, en comparant le temps  $\tau_1$  mis par une onde de la bande L1 pour aller du satellite au récepteur GPS avec le temps  $\tau_2$  mis par une onde de la bande L2, on peut remonter à  $\tau_{retard}$  en écrivant :

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{L}{c} \frac{f_c^2}{2} \left( \frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \text{ puisque, sur le reste du trajet, les ondes vont à la même}$$

vitesse (en négligeant la dispersion de la basse atmosphère). Pour la bande L1, il faut donc

$$\text{retrancher à } \tau_1 \text{ le retard ionosphérique } \tau_{retard,1} = (\tau_2 - \tau_1) \frac{\frac{1}{f_1^2}}{\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}}.$$

14) Dans le cas d'une densité électronique  $n_e$  uniforme sur une longueur  $L$ , le retard

ionosphérique vaut  $\tau_{retard} = \frac{L}{c} \frac{f_c^2}{2f^2} = \frac{e^2}{8\pi^2 cm \epsilon_0 f^2} n_e L$ . Dans le cas d'une densité  $n_e$  qui

dépend de l'altitude  $z$ , on peut découper l'ionosphère en tranche d'épaisseur  $dz$ , appliquer la formule du retard pour chaque tranche, puis sommer le retard cumulé sur toutes les

tranches. On a donc  $\tau_{retard} = \frac{e^2}{8\pi^2 cm \epsilon_0 f^2} \int_{ionosphère} n_e(z) dz$ . Or la quantité  $\int_{ionosphère} n_e(z) dz$

représente le nombre d'électrons par unité de surface sur toute la hauteur de l'ionosphère, il

s'agit donc du TEC. D'où  $\tau_{retard} = \frac{e^2}{8\pi^2 cm \epsilon_0} \frac{TEC}{f^2}$ . Le retard ionosphérique est

proportionnel au TEC. Une mesure de ce retard grâce à deux bandes distinctes (question précédente) permet donc de mesurer le TEC.

## Exercice 6 : Réflexion d'une onde électromagnétique sur l'ionosphère

a) D'après la formule du cours

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 17,8 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La pulsation de l'onde est  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 5,39 \cdot 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On est dans le domaine de transparence du plasma et

$$n_p = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx 1 \text{ donc } \underline{r} \approx 0 \text{ et } \underline{t} \approx 1$$

L'ionosphère ne réfléchit pratiquement pas les infrarouges solaires.

c) La pulsation est  $\omega = 2\pi f = 1,02 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On est dans le domaine réactif du plasma et

$$n_p = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = 17,4i$$

$$\text{donc } \underline{r} = \frac{1 - 17,4i}{1 + 17,4i} \text{ et } \underline{t} = \frac{2}{1 + 17,4i}$$

On remarque que  $|\underline{r}| = 1$ , le module de l'amplitude de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente, l'onde transmise ne transporte pas d'énergie, c'est une onde évanescente, qui ne pourra pas traverser la centaine de kilomètres d'ionosphère, et cette fréquence n'est pas adaptée aux échanges radio avec la Lune.

## Exercice 7 : Couche antireflet

a) Rappelons que les grandeurs qui interviennent sur un même dioptre évoluent à la même fréquence. Par ailleurs dans le milieu d'indice  $n_i$ ,  $k_i = \frac{\omega}{c/n_i} = n_i k$ .

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_1^0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_1}{c} = \frac{E_1^0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \\ \vec{E}_2 &= E_2^0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_2}{c} = -\frac{E_2^0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y \\ \vec{E}_3 &= E_3^0 e^{i(\omega t - nkz)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_3 = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_3}{c/n} = n \frac{E_3^0}{c} e^{i(\omega t - nkz)} \vec{u}_y \\ \vec{E}_4 &= E_4^0 e^{i(\omega t + nkz)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_4 = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_4}{c/n} = -n \frac{E_4^0}{c} e^{i(\omega t + nkz)} \vec{u}_y \\ \vec{E}_5 &= E_5^0 e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_5 = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_5}{c/N} = N \frac{E_5^0}{c} e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{u}_y\end{aligned}$$

b) La composante (tangentielle) du champ  $\vec{E}$  est continue :

$$\text{en } z=0 : E_1^0 + E_2^0 = E_3^0 + E_4^0 \quad (1) \quad \text{et en } z=e : E_3^0 e^{-i\varphi} + E_4^0 e^{i\varphi} = E_5^0 e^{-i\varphi} \quad (2)$$

La composante (tangentielle) du champ  $\vec{B}$  est continue ici :

$$\text{en } z=0 : E_1^0 - E_2^0 = n(E_3^0 - E_4^0) \quad (3) \quad \text{et en } z=e : n(E_3^0 e^{-i\varphi} - E_4^0 e^{i\varphi}) = N E_5^0 e^{-i\varphi} \quad (4)$$

c) Le système d'équations homogènes (1) à (4) permet de trouver les quatre inconnues  $E_2^0$  à  $E_5^0$  ( $E_1^0$  est une donnée). En imposant la condition  $E_2^0 = 0$ , il demeure trois inconnues pour quatre équations qui ne sont donc compatibles que sous certaines conditions.

$$\text{Les équations (1) et (3) conduisent alors en éliminant } E_1^0 \text{ à : } r_2 = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\text{Les équations (2) et (4) conduisent en éliminant } E_5^0 e^{-i\varphi} \text{ à : } r_2 = \frac{n/N-1}{n/N+1} e^{-2i\varphi}$$

Ces deux expressions de  $r_2$  supposent  $e^{-2i\varphi} = \pm 1$  réel :

- le cas  $e^{-2i\varphi} = +1$  conduit à  $n=0$  (impossible) ou  $N=1$  (inintéressant ici)

$$\text{- le cas } e^{-2i\varphi} = -1 \text{ conduit à } \boxed{n^2 = N} \text{ et } \boxed{e_p = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{2n}} \text{ ce qui impose}$$

l'épaisseur et l'indice de la couche antireflet.

$$\text{AN : } \underline{n = \sqrt{N} = 1,22} \quad \text{et} \quad \underline{e = \lambda_0 / 4n = 0,12 \mu\text{m}}$$

### Exercice 8 : (\*) Réflexion sous incidence oblique

a) On développe

$$\vec{k}_i \cdot \vec{OM} = k \cos \theta x + k \sin \theta y$$

$$\text{et } \vec{k}_r \cdot \vec{OM} = k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z$$

Le champ électrique est tangentiel et donc continu en  $x = 0$ . Il est nul dans le métal pour  $x = 0^+$ , il est donc aussi nul dans le vide (où se superposent l'onde incidente et de l'onde réfléchie) pour  $x = 0^-$ , soit :

$$\forall y, z, t, E_{0i} e^{i\omega t} e^{-ik \cos \theta \cdot 0} e^{-ik \sin \theta y} +$$

$$E_{0r} e^{i\omega_r t} e^{-ik_{rx} \cdot 0} e^{-ik_{ry} y} e^{-ik_{rz} z} = 0$$

b) Par identification, on en déduit que

$$E_{0i} + E_{0r} = 0, \quad \omega = \omega_r, \quad k \sin \theta = k_{ry} \text{ et } 0 = k_{rz}$$

c) La relation de dispersion dans le vide pour les OPPH incidente et réfléchie donne

$$\left. \begin{aligned} k^2 \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta &= \frac{\omega^2}{c_0^2} \\ k_{rx}^2 + k_{ry}^2 &= \frac{\omega_r^2}{c_0^2} \end{aligned} \right\} \text{ donc } k_{rx}^2 + k_{ry}^2 = k^2$$

$$\text{donc } k_{rx}^2 = k^2 - k_{ry}^2 = k^2 - k^2 \sin^2 \theta = k^2 \cos^2 \theta$$

Or  $k_{rx} < 0$  car l'onde réfléchie se propage de droite à gauche donc  $k_{rx} = -k \cos \theta$ .

d)  $k_{rz} = 0$  prouve que le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence (première loi de Descartes). Les vecteurs  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_r$  sont symétriques par rapport à  $\vec{u}_x$ , le rayon réfléchi fait donc avec la normale un angle  $r = -\theta$  (deuxième loi de Descartes).

### Exercice 9 : (\*) Polarisation par réflexion vitreuse sous incidence de Brewster

a) Les deux charges qui forment le dipôle sont mises en mouvement oscillatoire sinusoïdal forcé sous l'action de la force électrique, le moment dipolaire  $\vec{p}$  est donc colinéaire à  $\vec{E}_t$ .

b) Le sinus carré est nul si  $\theta = 0$  ou  $\pi$ . Le dipôle oscillant n'émet donc pas d'onde dans la direction de son axe d'oscillations, donc dans la direction de  $\vec{E}_t$ , donc dans la direction orthogonale au rayon transmis, donc dans la direction faisant un angle  $t$  avec le dioptre. Or le rayon réfléchi, s'il existe, fait un angle  $i$  avec la normale au dioptre. On en déduit qu'il y a absence de rayon réfléchi si

$$i + t = \frac{\pi}{2}$$

c) La relation de Descartes donne

$$n_1 \sin i = n_2 \sin t = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - i \right) = n_2 \cos i$$

$$\text{donc } \tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

L'application numérique donne

$$\left\{ \begin{aligned} i_B &= \arctan \frac{1,667}{1,333} = 51^\circ \\ t &= 39^\circ \end{aligned} \right.$$

On vérifie la relation  $i_B + t = 90^\circ$ .

d) Une onde électromagnétique incidente, sous incidence de Brewster, se décompose comme somme de deux ondes polarisées rectilignement, une dont la direction de polarisation est dans le plan d'incidence, une dont la direction de polarisation est orthogonale à ce plan. D'après l'étude théorique, la première onde ne crée aucune onde réfléchie. L'onde réfléchie est donc polarisée rectilignement orthogonalement au plan d'incidence. On met en évidence cette polarisation en mettant justement un polariseur avec une direction de polarisation dans le plan d'incidence et en observant l'extinction.

### Exercice 10 : (\*) Effet de peau sur un conducteur cylindrique

a) L'équation du champ  $\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  s'écrit en projection sur l'axe  $Oz$  :

$$\Delta E_z = \mu_0 \sigma i \omega E_z \quad \text{et} \quad \Delta E_z = e^{i\omega t} \Delta E \Rightarrow \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} = i \mu_0 \sigma \omega E$$

Avec la solution proposée :  $E = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta]$ ,

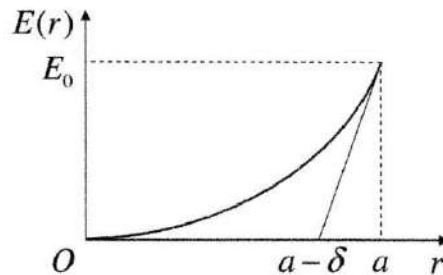
$$\text{on a } \frac{dE}{dr} = \frac{1+i}{\delta} E \quad \text{et} \quad \frac{d^2 E}{dr^2} = \frac{2i}{\delta^2} E, \quad \text{soit} \quad \frac{2i}{\delta^2} \left(1 + \frac{1-i}{2} \cdot \frac{\delta}{r}\right) E = i \mu_0 \sigma \omega E$$

qui admet comme solution pour  $r \gg \delta$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}$$

b) Le champ électrique s'écrit alors :

$\vec{E} = E_0 e^{-(a-r)/\delta} \exp i(\omega t - (a-r)/\delta) \vec{u}_z$ , ce qui correspond à un champ polarisé suivant  $\vec{u}_z$  et se propageant radialement avec une amplitude qui décroît vers l'intérieur du conducteur (champ non uniforme).



L'amplitude réelle du champ est :

$$E(r) = E_0 e^{-(a-r)/\delta}$$

Courant et champ sont essentiellement localisés dans une épaisseur  $\delta$  comptée à partir de la surface (entre  $a - \delta$  et  $a$ ) et sont très faibles au centre.

AN : \* pour  $f = 50$  Hz,  $\delta = 9,3$  mm  $\gg a = 0,5$  mm ce qui ne correspond pas au cas précédemment décrit ( $r \gg \delta$ ) ; la fréquence est trop faible et tout se passe comme pour  $f = 0$  : champ et courant sont quasi uniformes sur toute la section du fil.

\* pour  $f = 100$  kHz,  $\delta = 0,2$  mm du même ordre de grandeur que  $a$ , ce qui fixe la limite de l'uniformité.

\* pour  $f = 100$  MHz,  $\delta = 6,6$   $\mu\text{m} \ll a$  ; le courant circule alors sur une très faible épaisseur du conducteur, « l'épaisseur de peau », ce qui augmente considérablement la résistance du fil et rend la propagation très atténuée le long de l'axe ; les fréquences hertziennes sont transmises dans l'air et pas dans les conducteurs.

c) La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est donnée par :

$$\frac{\langle dP \rangle}{d\tau} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2 \quad \text{puisque} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \sigma \text{ réel}$$

Et puisque  $\vec{E} = E_0 e^{-(a-r)/\delta} \exp i\varphi \vec{u}_z$  avec  $\varphi(t)$  réel, il vient :

$$\frac{\langle dP \rangle}{d\tau} = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2(a-r)/\delta}$$

grandeur inhomogène essentiellement non nulle près de la surface  $r = a$  sur une épaisseur de l'ordre de  $\delta$ .

Avec un élément de volume  $d\tau = 2\pi r dr l$ , l'intégrale sur le tronçon de conducteur s'écrit :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 2\pi l e^{-2a/\delta} \int_0^a e^{2r/\delta} r dr$$

L'intégrale se calcule par parties et vaut  $\frac{a\delta}{2} e^{2a/\delta} - \frac{\delta^2}{4} (e^{2a/\delta} - 1)$

et en négligeant le second terme devant le premier puisque  $\delta \ll a$ ,

$$\boxed{\langle P \rangle \approx \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \pi a \delta l}$$

L'élément de volume écrit sous la forme  $2\pi a(\delta/2)l$  indique que tout se passe si le champ et la densité de courant étaient uniformes sur un anneau de rayon  $a$  et d'épaisseur  $\delta/2$ , confirmant la notion d'épaisseur de peau.

d) Évaluons d'abord le courant complexe :

$$\underline{I}(t) = \iint_{(S)} \underline{j}(r, t) \cdot d\vec{S} = \sigma E_0 e^{-a/\delta} \exp(i(\omega t - a/\delta)) \cdot 2\pi \int_0^a e^{(1+i)r/\delta} r dr$$

Comme précédemment, l'intégrale vaut  $\frac{a\delta}{1+i} e^{(1+i)a/\delta} - \left(\frac{\delta}{1+i}\right)^2 (e^{(1+i)a/\delta} - 1)$  et sa

valeur principale pour  $\delta \ll a$  est  $\frac{a\delta}{1+i} e^{(1+i)a/\delta}$ , d'où :

$$\underline{I}(t) = \frac{2\pi\sigma E_0 a \delta}{1+i} e^{iax} \quad \text{et} \quad \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} |\underline{I}|^2 = \pi^2 \sigma^2 E_0^2 a^2 \delta^2$$

Pour accéder à la résistance qu'on ne peut plus définir par  $U/I$ , il est alors commode de passer par une définition énergétique :

$$\boxed{R = \frac{\langle P \rangle}{\langle I^2 \rangle} = \frac{l}{2\pi\sigma a \delta} = \frac{a}{2\delta} R_0}$$

car en régime continu, lorsque le champ électrique et la densité de courant sont uniformes,  $R_0 = l/\sigma\pi a^2$ .

Bien sûr plus la fréquence augmente, plus le courant diminue puisque cantonné dans une couronne d'épaisseur  $\delta$  faible, et donc plus la résistance augmente.

Rq : Écrite sous la forme  $R = l/\sigma s$  avec  $s = 2\pi a(\delta)$ , tout se passe comme si l'épaisseur utile était  $\delta$ , l'épaisseur de peau. Le cas  $f = 0$ , soit  $\delta \rightarrow \infty$ , ne redonne pas  $R = R_0$  à cause de l'hypothèse  $\delta \ll a$  qui n'est plus valable.

Pour transporter des courants hautes fréquences dans des conducteurs cylindriques, il est alors inutile que ces conducteurs soient pleins. Puisque les courants circulent en surface extérieure à cause de l'effet de peau, une mince couronne cylindrique creuse suffit, ce qui allège considérablement la masse et le coût de l'objet : cette structure creuse ressemble alors à s'y méprendre à un guide d'onde comme celui de la question 82.. Ces guides, à section circulaire ou rectangulaire sont très utilisés en pratique à haute fréquence.