* $E < V_0$: état lié de la particule (traité dans la suite du cours). On montre dans ce cas que son énergie est quantifiée.

ⓑ Mise en équation (recherche états stationnaires)

* dans les régions ① et ③ on écrit l'E.S.S. :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x).\varphi(x) = E.\varphi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + (V_0 - E)\varphi(x) = 0$$

$$\varphi''(x) + \underbrace{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}_{<0}\varphi(x) = 0$$

Soit $\boxed{\varphi''(x) - q^2\varphi(x) = 0 \quad \text{avec } q = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}$

* dans la région ② :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + 0\times\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\varphi''(x) + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{>0}\varphi(x) = 0$$

Soit $\boxed{\varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0 \quad \text{avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$

ⓒ Solutions

Dans notre situation, le potentiel $V(x)$ est une fonction paire. Par symétrie, on peut alors chercher pour φ une fonction paire (ce que l'on fait par la suite).

Rq: une fonction φ impaire serait aussi solution.

solutions :

① $\varphi(x) = A_1 e^{qx} + B_1 e^{-qx}$

② $\varphi(x) = A_2 \cos(kx)$ (fct paire)

③ $\varphi(x) = A_3 e^{qx} + B_3 e^{-qx}$

Mais la fonction d'onde ne doit pas diverger qd $x \to \pm\infty$, donc $B_1 = 0$ et $A_3 = 0$.
De plus, si l'on cherche φ paire on doit avoir $B_3 = A_1$.

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} ① \ \varphi(x) = A_1 e^{qx} \\ ② \ \varphi(x) = A_2 \cos(kx) \\ ③ \ \varphi(x) = A_1 e^{-qx} \end{array}}$$

ⓓ Conditions aux limites

V présente des discontinuités finies en $x = \pm \frac{a}{2}$ donc aux points de raccordement, φ et $\frac{d\varphi}{dx}$ doivent être continues.

Il suffit, par symétrie de notre situation, d'exprimer ces 2 conditions en $x = \frac{a}{2}$ seulement (par ex) :

* $\varphi\left(\frac{a}{2}^-\right) = \varphi\left(\frac{a}{2}^+\right)$

$$A_2 \cos\left(k \frac{a}{2}\right) = A_1 e^{-q a/2}$$

* ds ②, $\varphi'(x) = -k A_2 \sin(kx)$

ds ③, $\varphi'(x) = -q A_1 e^{-qx}$

$$\varphi'\left(\frac{a}{2}^-\right) = \varphi'\left(\frac{a}{2}^+\right)$$

$$-k A_2 \sin\left(k \frac{a}{2}\right) = -q A_1 e^{-q a/2}$$

soit :
$$\boxed{\begin{aligned} A_2 \cos\left(k \frac{a}{2}\right) &= A_1 e^{-q.a/2} \quad (a) \\ k A_2 \sin\left(k \frac{a}{2}\right) &= q A_1 e^{-q.a/2} \quad (b) \end{aligned}}$$

On écarte la solution triviale $\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases}$

Une condition nécessaire pour que ce système d'équation soit valide est : $((b)/(a))$

$$k \tan\left(k \frac{a}{2}\right) = q$$

On pose $\alpha = \frac{ka}{2}$ et $\beta = \frac{qa}{2}$. On a alors

$$\frac{2\alpha}{a} \tan(\alpha) = q$$

soit $\boxed{\beta = \alpha . \tan(\alpha)}$

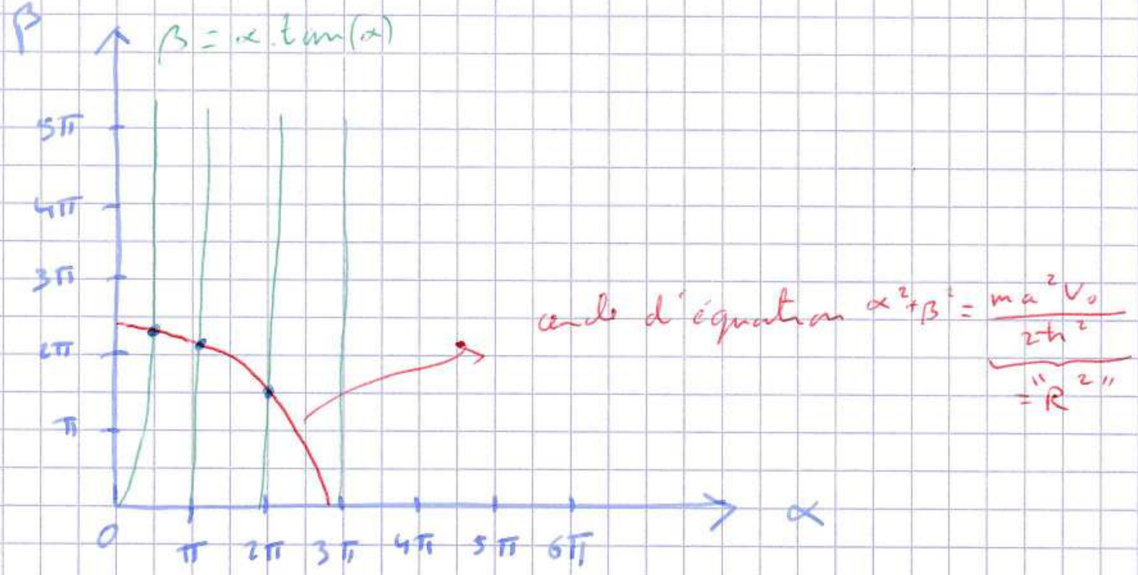
De plus, k et q sont reliés par :

$$k^2 + q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

soit $\frac{4}{a^2} \alpha^2 + \frac{4}{a^2} \beta^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = \frac{m a^2 V_0}{2\hbar^2}}$$

Pour trouver les valeurs permises de k et q, donc de α et β, on procède à une méthode graphique :



On en déduit que α et β prennent des valeurs discrètes. Par conséquent k et q sont quantifiés. D'où :

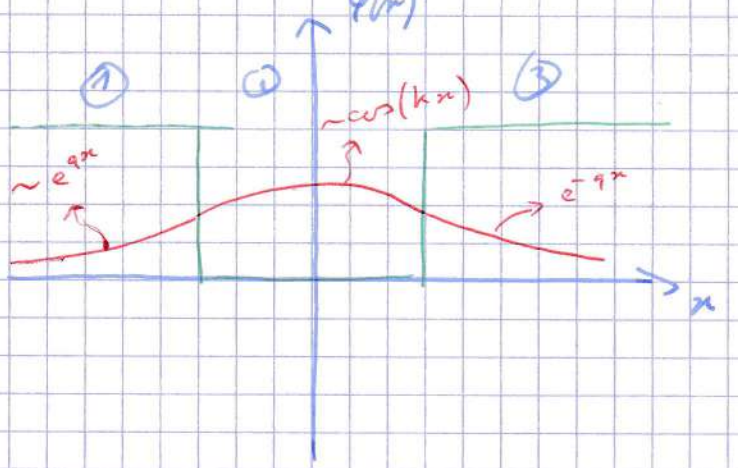
Les énergies associées aux états stationnaires ~~énergétiques~~ liés d'un puits fini sont quantifiées

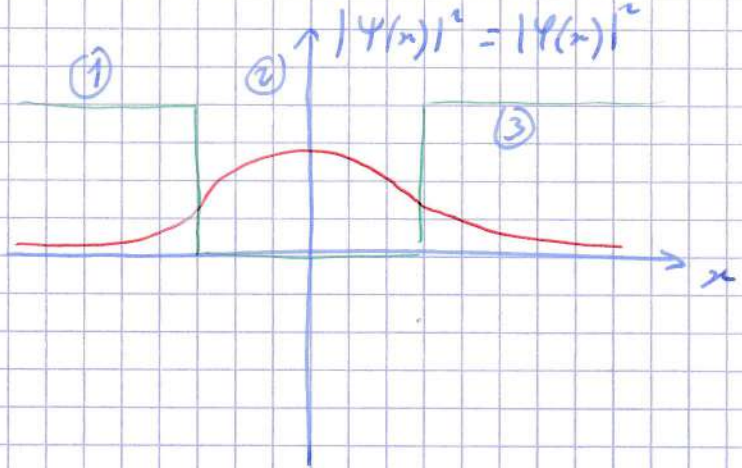
$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$$

où les k_n se déterminent par méthode graphique

c) Représentation des fonctions d'onde

<u>n = 1</u>





n = 2 : exercice !

s'inspirer du puits infini

b) Commentaires importants

* Ds la zone ③ (et aussi ds ①) :

$$\Psi(x,t) = A_3 e^{-qx} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

cf plasma domaine réactif ($\omega < \omega_p$)

il s'agit d'une onde evanescente (= stationnaire atténuée). On a donc une probabilité non nulle de trouver la particule dans la zone ③ ! Cette situation est interdite classiquement (énergie totale de la particule insuffisante, conduisant à une énergie cinétique négative : $E_{tot} = E_c + E_p$ avec $E_{tot} < E_p$)

* la profondeur de pénétration de l'onde s'écrit :

$$\delta = \frac{1}{q} \quad \text{soit} \quad \delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Elle est d'autant plus grande que :
→ m est faible (effets quantiques plus marqués pour particules moins massives)
→ $(V_0 - E)$ est faible (puits peu profond)

On note également que $\delta \to 0$ quand $\hbar \to 0$ (limite classique).

* Inégalité de Heisenberg spatiale :
$\Delta x . \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$
ds ce cas, Δx est plus grand que la valeur pour le puits infini (ondes évanescentes), donc Δp_x peut prendre des valeurs plus petites. On observe en effet des valeurs d'énergie (dont l'énergie minimale) plus faibles ds le cas du puits fini

V/ Effet tunnel et applications

voir doc 1, 2 et 3 (+ exercices)