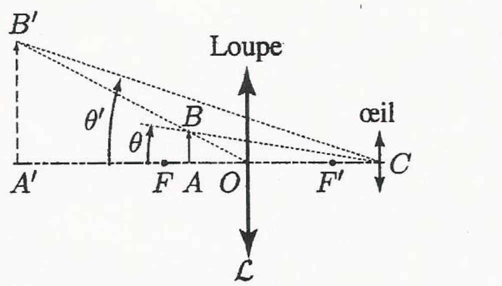
Exercice pour s'entraîner

Étude d'une loupe

ENAC 2008

7. — On appelle *distance de vision distincte* d'un œil la distance d qui sépare un objet dont l'image sur la rétine est nette, du centre optique C de cet œil que l'on assimile à une lentille mince. Grâce à la propriété d'accommodation du cristallin, d peut varier entre une *distance maximale* de vision distincte d_M et une distance minimale de vision distincte d_m. Pour un œil normal, $d_m = 20$ cm et $d_M = \infty$.

Un observateur dont la vision est normale, se sert d'une lentille mince convergente C de centre optique O et de distance focale image f' comme d'une loupe. Il observe l'image virtuelle $\overline{A'B'}$ que donne la loupe d'un objet réel $\overline{AB}$.



En s'aidant de considérations géométriques (cf. Figure ci-contre) et de la relation de conjugaison des lentilles minces, exprimer la quantité $G = \overline{A'B'}/\overline{AB}$ en fonction de f', de $d = \overline{A'C}$ et de la distance $\delta = \overline{OC}$ qui sépare le centre optique O de la lentille *(L)* du centre optique C de l'œil.

A) $G_t = \dfrac{d+\delta}{2f'}$ B) $G_t = \dfrac{f'}{d+2\delta}$ C) $G_t = \dfrac{f'+\delta}{d}$ D) $G_t = \dfrac{d+f'-\delta}{f'}$

8. — Lorsque l'observateur regarde un objet $\overline{AB}$ à travers la loupe, il voit son image $\overline{A'B'}$ sous l'angle θ'. Lorsqu'il enlève la loupe sans changer la distance de l'objet à son œil, il voit cet objet $\overline{AB}$ sous l'angle θ (cf. figure ci-dessus). On définit le grossissement G de la loupe par le rapport $G = \theta'/\theta$.

Exprimer G en fonction de f', δ et d. On supposera les angles suffisamment petits pour que l'on puisse confondre le sinus et la tangente de ces angles avec leurs valeurs exprimées en radian.

A) $G = \dfrac{f'(d-\delta) - f'^2}{d^2}$ B) $G = \dfrac{\delta(d-\delta) + f'^2}{f'^2}$ C) $G = \dfrac{f'+\delta}{f'} - \dfrac{\delta^2}{f'd}$ D) $G = \dfrac{(f'+\delta)(d+\delta)}{df'}$

9. — Quelle est la valeur de d donnant un grossissement maximum ?

A) $d = f' - \delta$ B) $d = \infty$ C) $d = 4f'$ D) $d = 4(f'+\delta)$

10. — Que vaut alors ce grossissement G_{max} ?

A) $G_{max} = \dfrac{f'+2\delta}{f'}$ B) $G_{max} = \dfrac{f'+\delta}{\delta}$ C) $G_{max} = \dfrac{f'}{\delta}$ D) $G_{max} = \dfrac{f'+\delta}{f'}$

11. — L'observateur maintient fixe la position de la loupe par rapport à son œil et, suivant la position de l'objet, il accommode de l'infini jusqu'à sa distance minimale de vision distincte d_m.

Calculer la variation $\Delta G = G(\infty) - G(d_m)$ du grossissement.

A) $\Delta G = \dfrac{\delta^2}{f'd_m}$ B) $\Delta G = \dfrac{(2f+\delta)^2}{f'd_m}$ C) $\Delta G = \dfrac{f'^2+\delta^2}{f'd_m}$ D) $\Delta G = \dfrac{f'^2}{\delta\, d_m}$

12. — Le centre optique de l'œil est placé à 18 cm du centre optique de la loupe. Quelle doit-être la valeur f'_0 de la distance focale image de la loupe pour que le grossissement maximal G_{max} vaille 10 ?

A) $f'_0 = 1$cm B) $f'_0 = 10$cm C) $f'_0 = 2$cm D) $f'_0 = 5$cm

Solution

Etude d'une Loupe

1) D'après la formule de Descarte : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'} = \frac{f' - \overline{OA'}}{\overline{OA'} \times f'}$

De plus $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \boxed{G_t = \frac{f' - \overline{OA'}}{f'} = \frac{f' - \overline{OC} - \overline{CA'}}{f'} = \frac{f' - s + d}{f'} \quad \text{Rep D}}$

2) $G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = G_t \times \frac{\overline{AC}}{d} = G_t \times \frac{\overline{AO} + \overline{OC}}{d} = G_t \times \frac{-\overline{OA} + s}{d}$

or $\overline{OA} = \frac{\overline{OA'}}{G_t} = \frac{\overline{OC} + \overline{CA'}}{G_t} = \frac{s - d}{G_t}$ donc $G = \frac{G_t}{d}\left(\frac{d-s}{G_t} + s\right) = \frac{G_t}{d}\left(\frac{d - s + sG_t}{G_t}\right)$

$\Rightarrow G = \frac{1}{d}\left(d - s + \frac{sf' - s^2 + ds}{f'}\right) = \frac{1}{df'}\left(df' - \cancel{sf'} + \cancel{sf'} - s^2 + ds\right)$

$\Rightarrow \boxed{G = \frac{f' + s}{f'} - \frac{s^2}{df'} \quad \text{Rep C}}$

3) G est max pour d ∞ (image rejetée à l'∞) Réponse B (AB est dans le plan focal objet)

4) Le grandissement vaut alors $G_{max} = \frac{f' + s}{f'}$ $\boxed{\text{Rep D}}$

5) OC = cste

$G_\infty = G_{max} = \frac{f' + s}{f'}$ $\quad G_{dm} = \frac{f' + s}{f'} - \frac{s^2}{f' d_m} \Rightarrow \Delta G = \frac{f' + s}{f'} - \frac{f' + s}{f'} + \frac{s^2}{f' d_m}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta G = \frac{s^2}{f' d_m} \quad \text{Rep A}}$

6) $s = 18\text{ cm}$ $\quad G_{max} = \frac{f'_0 + s}{f'_0} \Rightarrow G_{max} f'_0 = f'_0 + s \Rightarrow f'_0 (G_{max} - 1) = s$

$\Rightarrow f'_0 = \left(\frac{G_{max} - 1}{s}\right)^{-1} = \left(\frac{10 - 1}{18}\right)^{-1} = 2\text{ cm} \Rightarrow f'_0 = 2\text{ cm} \Rightarrow \boxed{\text{Réponse C}}$